

**ИЗПИТ ПО ИЗБИРАЕМИЯ УЧЕБЕН ПРЕДМЕТ
“ЛОГИЧЕСКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИ МЕТОДИ”
(СУ “СВЕТИ КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”, ФМИ, 06. 02. 2022 Г.)**

Задача 1. Да се реши рекурентното уравнение $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k} a_k$, $n \geq 1$, с начално условие $a_0 = 1$.

Задача 2. Пресметнете $10,004^3$ с точност до десети, без да използвате хартиени таблици и електронни устройства. За целта използвайте производна.

Задача 3. На черната дъска е написан буквеният низ “ВАБААББВААВ”. На всяка стъпка имаме право да заменим подниз “АБ” с “БВ”, “АА” с “ВА”, “БА” с “ВБ”, “ВА” с “АВ”, “АВ” с “ВА”, “БВ” с “ВБ”, “ВБ” с “БВ”. Може ли да се получи буквеният низ “АБВАБАБАВАБ” след краен брой стъпки?

Задача 4. Намерете всички непрекъснати функции $f: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$, които удовлетворяват уравнението $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ за всички реални числа x и y .

Задача 5. Възможно ли е равнината да бъде покрита с краен брой параболи, тоест всяка точка от равнината да лежи върху някоя парабола или в нейната вътрешност (изпъкналата област, оградена от параболата)? Допуска се пресичане на параболите.



Задача 6. Докажете, че всяко цяло положително число може да се изрази чрез аритметичните действия (събиране, изваждане, умножение и деление) и числата 6 и 10, като всяко от тях участва краен, но неограничен брой пъти в аритметичния израз. Може да се използват и скоби.

Време: три астрономически часа — две части по деветдесет минути всяка, с двадесетминутна почивка. Първа част: зад. 1, 2, 3. Втора част: зад. 4, 5, 6.

СХЕМА НА ОЦЕНЯВАНЕ

Задача 5 носи **2 т.:** **1 т.** за идеята, обяснена неформално, но подробно, и **1 т.** за формално доказателство. Всяка от останалите задачи носи по **1 т.** Оценката = **1 + точките**. Зачитат се само верни и добре обяснени решения.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Пресмятаме първите няколко члена на редицата:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 8 \text{ и тъй нататък.}$$

Оттук налучкваме формулата $a_n = 2^n$ за всяко цяло неотрицателно число n . Доказваме я със силна математическа индукция.

База: $n = 0$. По условие $a_0 = 1 = 2^0$, тоест $a_n = 2^n$ при $n = 0$.

Индуктивна стъпка: Нека n е някое цяло положително число, такова че $a_k = 2^k$ за всяко цяло число $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$. При това предположение ще докажем, че $a_n = 2^n$. Наистина, като използваме рекурентното уравнение в съчетание с индуктивното предположение, получаваме следното:

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k} a_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k} 2^k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^n = \frac{1}{n} \cdot n \cdot 2^n = 2^n,$$

тоест $a_n = 2^n$, което трябваше да се докаже.

Задача 2. Разглеждаме функцията $y = x^3$. В точката $x_0 = 10$ тази функция притежава стойност $y_0 = (x_0)^3 = 10^3 = 1000$. След това задаваме на аргумента нарастване $dx = 0,004$. Производната $y' = 3x^2$ при $x = x_0 = 10$ има стойност $3x^2 = 3(x_0)^2 = 3 \cdot 10^2 = 300$, което означава, че диференциалът на функцията $dy = y' dx = 300 \cdot 0,004 = 1,2$; това е приблизителното нарастване на функцията. Следователно $10,004^3 \approx y_0 + dy = 1000 + 1,2 = 1001,2$.

Задача 3 може да се реши по два начина: с инвариант и с полуинвариант. Инвариант е броят на буквите “Б”: този брой не се променя при никоя от позволените замени на поднизове. В началния низ има три букви “Б”, а в крайния — четири. Следователно крайният низ не може да се получи от началния чрез позволените замени на поднизове.

Полуинвариант е броят на буквите “В”: при всяка замяна той или нараства, или остава същият, но никога не намалява. В началния низ има три букви “В”, а в крайния — две, което е по-малко от три. Оттук пак следва, че крайният низ не може да се получи от началния чрез позволените замени на поднизове.

Задача 4. След като $f > 0$, ще логаритмуваме функционалното уравнение: $\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y)$. После полагаме $g(x) = \ln f(x)$ и то приема вида $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Това е функционалното уравнение на адитивността, а $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната като композиция на две непрекъснати функции. Затова $g(x) = cx$ и $f(x) = e^{g(x)} = e^{cx} = (e^c)^x = a^x$, където c е реална константа, $a = e^c = \text{const.} > 0$. Проверката показва, че всички показателни функции с положителна основа са решения: приемат само положителни стойности, аргументът им е произволно реално число и $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ за всички x и y .

Задача 5 се решава посредством принципа на крайния елемент. Избираме произволна точка A и построяваме лъч $Ap \rightarrow$ с начало т. A в произволна посока, стига лъчът да не е успореден на оста на никоя парабола. Това е възможно, защото дадените параболите са краен брой, а посоките са безбройно много. Непокрити от параболите и техните вътрешни области са всички точки от лъча, достатъчно отдалечени от точката A .

Действително, да вземем коя да е от дадените параболите и да изберем оста ѝ за ординатна ос така, че положителната ѝ посока да сочи към вътрешността на параболата. За начало на правоъгълната координатна система избираме произволна точка от оста на параболата. Перпендикуляра през тази точка към оста на параболата избираме за абсцисна ос; ориентираме абсцисната ос по такъв начин, че завъртането в първи квадрант (тоест по най-късия път) от абсцисната към ординатната ос да бъде обратно на посоката на движение на часовниковата стрелка. Единичната отсечка избираме произволно (еднаква за двете оси). Спрямо тази координатна система избраната парабола се описва с уравнение от втора степен: $y = ax^2 + bx + c$. Важи неравенството $a > 0$ заради избора на посока на ординатната ос. Правата, част от която е лъчът $Ap \rightarrow$, не е успоредна на ординатната ос, затуй се описва с уравнение от първа степен: $y = kx + r$. От избора на посока на ординатната ос следва, че частта от правата, която е извън параболата, е точно частта от правата, лежаща под параболата. Въпросната част се намира като решение на неравенството $ax^2 + bx + c > kx + r$, а то е равносилно на неравенството $ax^2 + (b - k)x + (c - r) > 0$. Решенията му са или всички реални числа, или образуват обединение от два интервала, тоест $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; този извод се получава от $a > 0$. В първия случай всички точки от лъча $Ap \rightarrow$ са външни за избраната парабола. Във втория случай външни за параболата са тези и само тези точки от лъча $Ap \rightarrow$, чиито абсциси са по-малки от x_1 или по-големи от x_2 (в зависимост от посоката на лъча $Ap \rightarrow$). Да означим с B точката от $Ap \rightarrow$ с абсциса x_1 или x_2 според това, кой от двата безкрайни интервала се съдържа изцяло в лъча $Ap \rightarrow$ (може $x_1 = x_2$; това не пречи на разсъжденията). При движение по лъча $Ap \rightarrow$ от т. A към безкрайността всички точки след B лежат извън разглежданата парабола.

Нека n е броят на параболите. Поначало всяка от тях има собствена точка B , общо n точки: $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ (може някои от тях да съвпадат, дори всички). Да означим с C онази от точките $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$, която е най-далече от т. A . Нека D е точка от лъча $Ap \rightarrow$, избрана така, че т. C да лежи между т. A и т. D (ако C съвпада с A , избираме за D произволна точка от лъча, различна от A). Следователно всяка от точките $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ лежи между т. D и т. A или съвпада с A , затова т. D лежи извън всички параболите, тоест тя представлява непокрита точка от равнината.

Ето защо равнината не може да се покрие с краен брой параболите (и техните вътрешни области).

Тази задача е взета от руското списание “Квант”.

Задача 6 се решава стъпка по стъпка:

1) Изразяваме НОД $(6 ; 10) = 2$ чрез числата 6 и 10, като използваме само действията събиране и изваждане: $6 + 6 - 10 = 2$.

2) Изразяваме единицата. Сбор, разлика и произведение на четни числа са пак четни числа, затова трябва да използваме действието деление. Например $6 : 2 = 3$, после $3 - 2 = 1$. Подробно записано: $6 : (6 + 6 - 10) - (6 + 6 - 10) = 1$.

3) Всяко цяло положително число n е сбор от n единици:

$$\underbrace{6 : (6 + 6 - 10) - (6 + 6 - 10)}_{\text{събираемо № 1}} + \dots + \underbrace{6 : (6 + 6 - 10) - (6 + 6 - 10)}_{\text{събираемо № } n} = 1 + \dots + 1 = n.$$

Задачата може да се реши и по-кратко:

1) Изразяваме единицата чрез действието деление, например $10 : 10 = 1$. Разбира се, вместо десетката можем да използваме другото число: $6 : 6 = 1$.

2) Всяко цяло положително число n е сбор от n единици:

$$10 : 10 + 10 : 10 + 10 : 10 + \dots + 10 : 10 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n.$$

Предимствата на този начин са много: по-кратък е (две стъпки вместо три); използва само две от четирите действия и само едното от двете дадени числа, като не зависи от тях (работи с произволни числа).