Домашно №4 по Дискретни Структури, спец. Информатика,
летен семестър 2013г.

ТЕМА: ЛИНЕЙНИ РЕКУРЕНТНИ ОТНОШЕНИЯ. ГРАФИ. ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ

Задача 1: (25т.) Намерете общото решение на линейното нехомогенно рекурентно отношение

$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 7^n + (n^2 + 1)3^n$

Решение: Да разгледаме съответното хомогенно рекурентно отношение и да намерим корените на неговото характеристично уравнение:

$r^2 - 5r + 6 = 0, \quad r_1 = 3, r_2 = 2$

Сега взимаме пред вид нехомогенната част на рекурентното отношение: $f(n) = 7^n + (n^2 + 1)3^n$, където 7 не е корен на характеристичното уравнение, а 3 е негов еднократен корен. Така получаваме следното общо решение на линейното нехомогенно рекурентно отношение:

$s_n = A2^n + (B_0 + B_1 n + B_2 n^2 + B_3 n^3)3^n + C7^n$

Задача 2: (25т.) Комуникационен канал служи за предаване на думи над азбуката $\{a, b, c\}$. За да се предаде по канала, всяка дума трябва да отговаря на следните условия: не може да започва с буквата c и не може да има две еднакви съседни букви. Намерете броя на думите с дължина n, които могат да бъдат предадени по комуникационния канал.

Забележка: Съставете и решете линейно рекурентно отношение за броя на търсените думи с дължина n.

Решение: Да означим с s_n броя на допустимите думи с дължина n. Най-късите думи са с дължина 1 и това са думите a и b . Нека α е дума с дължина $n-1$. Тя може да бъде разширена до дума с дължина n, отговаряща на условието, по два начина - като се допълни с всяка от буквите, различни от нейната последна буква. Така достигаме до следното рекурентно отношение и съответно начално условие:

$s_1 = 2$
$s_n = 2s_{n-1}, \; n \geq 2$

Общото решение на това рекурентно отношение е геометрична прогресия с частно 2, т.е.

$s_n = A.2^n$

Като вземем пред вид началното условие, получаваме

$s_n = 2^n$

Задача 3: (25т.) Да се докаже или опровергае твърдението, че граф със 7 върха и 17 ребра може да има изолиран връх.

Решение: Граф със 7 върха и 17 ребра *не може* да има изолиран връх. Наистина, нека допуснем противното, т.е. съществува граф $G(V, E)$, такъв че $|V| = 7$, $|E| = 17$ и $\exists v_i \in V : d(v_i) = 0$. Да разгледаме подграфа $G'(V', E'), V' = \{V \backslash \{v_i\}\}$, индуциран от всички останали върхове на G. Броят на неговите върхове е $|V'| = 6$, а за броя на ребрата е в сила максимумът на броя на ребрата в неориентиран граф, т.е. $|E'| \leq 15$. Но тъй като $|E| = |E'|$, следва че $|E| \leq 15$, което противоречи на условието.

Следователно допускането, че графът може да има изолиран връх е грешно.

Задача 4: Дадена е двоичната функция $f(\widetilde{x}^3) = (x \downarrow y) \oplus (y|\overline{z})$.

а)(15т.) Да се напише таблицата на функцията $f(\widetilde{x}^3)$;

Решение:

x	y	z	$x \downarrow y$	$\overline{z}$	$y\|\overline{z}$	$f(x,y,z) = (x \downarrow y) \oplus (y\|\overline{z})$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1

б)(10т.) Да се напиша Съвършената ДНФ на функцията $f(\widetilde{x}^3)$.

Решение: СвДНФ $= \overline{x}yz \vee x\overline{y}\ \overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xyz$