Примерни решения на домашно № 1

---

22 т. **Задача 1:** Нека $k \in \mathbb{N}^+$. Докажете, че

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta(n^{k+1})$$

4 т. Обяснете защо няма противоречие между това и факта, че всеки полином от k-та степен на n, който е положителна функция, е асимптотично еквивалентен на n^k.

Решение: Можем да ограничим отгоре така:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \leq \sum_{i=1}^{n} n^k = n \times n^k = n^{k+1} = O(n^{k+1})$$

Можем да ограничим отдолу така:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} i^k \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \left(\frac{n}{2}\right)^k = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \times \left(\frac{n}{2}\right)^k \geq \frac{n^{k+1}}{2^{k+1}} = \Omega(n^{k+1})$$

Противоречие няма, понеже $\sum_{i=1}^{n} i^k$ не е полином на n. Полиномът има фиксиран брой членове, докато тази сума има n на брой събираеми.

Задача 2: Подредете по асимптотично нарастване следните 12 функции:

$$f_1(n) = n^2 \qquad f_2(n) = \sqrt{n} \qquad f_3(n) = (\ln n)^2 \qquad f_4(n) = \sqrt{(\lg n)!}$$

$$f_5(n) = \sum_{k=2}^{\lg n} \frac{1}{k} \qquad f_6(n) = \lg \lg n \qquad f_7(n) = 2^{2^{\sqrt{n}}} \qquad f_8(n) = \binom{\binom{n}{3}}{2}$$

$$f_9(n) = 2^{n^2} \qquad f_{10}(n) = 3^{n\sqrt{n}} \qquad f_{11}(n) = 2^{\binom{n}{2}} \qquad f_{12}(n) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2^k}$$

Решение: Добре известно е, че геометричният ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ е сходящ. Тогава сумата $\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2^k}$ е ограничена отгоре от константа. Тогава $f_{12}(n) = \Theta(1)$.

Сравняваме $f_{12}(n)$ с $f_6(n)$. Очевидно

$$f_{12}(n) \prec f_6(n)$$

тъй като логаритъмът е неограничено растяща функция.

Сравняваме $f_5(n)$ с $f_6(n)$. От лекции е известно, че

$$\sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{k} \asymp \lg \ell$$

Тогава

$$f_5(n) = \sum_{k=2}^{\lg n} \frac{1}{k} \asymp \lg \lg n$$

Тогава $f_5(n) \asymp f_6(n)$. Дотук имаме

$$f_{12}(n) \prec f_5(n) \asymp f_6(n)$$

Сравняваме $f_6(n)$ с $f_3(n)$. Тъй като $\lg \lg n \prec \ln n$ и $\ln n \prec (\ln n)^2$, вярно е, че;

$$\lg \lg n \prec (\ln n)^2$$

Тогава $f_6(n) \prec f_3(n)$. Дотук имаме

$$f_{12}(n) \prec f_5(n) \asymp f_6(n) \prec f_3(n)$$

Сравняваме $f_3(n)$ с $f_2(n)$. От лекции знаем, че всяка полилогаритмично растяща функция расте асимптотично по-бавно от всяка полиномиално растяща функция. Тогава

$$f_3(n) \prec f_2(n)$$

Дотук имаме

$$f_{12}(n) \prec f_5(n) \asymp f_6(n) \prec f_3(n) \prec f_2(n)$$

Сравняваме $f_2(n) = n^{\frac{1}{2}}$ с $f_1(n) = n^2$. Очевидно е, че

$$f_2(n) \prec f_4(n)$$

Дотук имаме

$$f_{12}(n) \prec f_5(n) \asymp f_6(n) \prec f_3(n) \prec f_2(n) \prec f_1(n)$$

Да разгледаме $f_8(n) = \binom{\binom{n}{3}}{2}$. Вярно е, че

$$\binom{\binom{n}{3}}{2} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 1\right)}{2} \asymp n^6 \tag{1}$$

Сравняваме $f_1(n) = n^2$ с $f_8(n)$. Предвид (1), в сила е

$$f_1(n) \prec f_8(n)$$

Дотук имаме

$$f_{12}(n) \prec f_5(n) \asymp f_6(n) \prec f_3(n) \prec f_2(n) \prec f_1(n) \prec f_8(n)$$

Да разгледаме $f_4(n)$. Апроксимацията на Stirling казва, че

$$\ell! \asymp \sqrt{\ell}\frac{\ell^\ell}{e^\ell}$$

Тогава

$$f_4(n) \asymp \sqrt{(\lg n)!} \asymp \sqrt{\sqrt{\lg n}\frac{(\lg n)^{\lg n}}{e^{\lg n}}} = \sqrt{\sqrt{\lg n}\frac{(\lg n)^{\lg n}}{n}} \tag{2}$$

Тривиално се доказва с логаритмуване на двете страни, че

$$(\lg n)^{\lg n} = n^{\lg \lg n}$$

Заместваме в (2) и получаваме

$$f_4(n) \asymp \sqrt{\sqrt{\lg n}\frac{n^{\lg \lg n}}{n}} = \sqrt[4]{\lg n} \times n^{\frac{1}{2}((\lg \lg n)-1)} \tag{3}$$

Сравняваме $f_8(n)$ с $f_4(n)$. Очевидно

$$n^6 \prec n^{\frac{1}{2}((\lg \lg n)-1)} \tag{4}$$

понеже двойният логаритъм е неограничено растяща функция. Това може да се изведе и с логаритмуване на двете страни. От (1) и (4) заключаваме, че

$$f_8(n) \prec f_4(n)$$

Дотук имаме

$$f_{12}(n) \prec f_5(n) \asymp f_6(n) \prec f_3(n) \prec f_2(n) \prec f_1(n) \prec f_8(n) \prec f_4(n)$$

Да сравним $f_4(n)$ с $f_{10}(n) = 3^{n\sqrt{n}}$. От (3) знаем, че

$$f_4(n) \asymp \sqrt[4]{\lg n} \times n^{\frac{1}{2}((\lg \lg n)-1)} \tag{5}$$

Твърдим, че $f_4(n) \prec f_{10}(n)$. Наистина, ако разгледаме логаритъма на дясната страна на (5) и логаритъма на $3^{n\sqrt{n}}$, имаме

$$\lg f_4(n) \asymp \lg\left(\sqrt[4]{\lg n} \times n^{\frac{1}{2}((\lg \lg n)-1)}\right) \asymp (\lg n)(\lg \lg n)$$
$$\lg f_{10}(n) \asymp n\sqrt{n} = n^{\frac{3}{2}}$$

Щом $\lg f_4(n) \prec \lg f_{10}(n)$, съгласно изучаваното на лекции, в сила е

$$f_4(n) \prec f_{10}(n)$$

Дотук имаме

$$f_{12}(n) \prec f_5(n) \asymp f_6(n) \prec f_3(n) \prec f_2(n) \prec f_1(n) \prec f_8(n) \prec f_4(n) \prec f_{10}(n)$$

Да сравним $f_{10}(n)$ с $f_{11}(n)$. Твърдим, че $f_{10}(n) \prec f_{11}(n)$. За да покажем това, ще покажем, че $\lg f_{10}(n) \prec \lg f_{11}(n)$. Наистина,

$$\lg f_{10}(n) \asymp n\sqrt{n} = n^{\frac{3}{2}}$$
$$\lg f_{11}(n) = \binom{n}{2} \asymp n^2$$

и очевидно $n^{\frac{3}{2}} \prec n^2$. Щом $\lg f_{10}(n) \prec \lg f_{11}(n)$, съгласно изучаваното на лекции, в сила е

$$f_{10}(n) \prec f_{11}(n)$$

Дотук имаме

$$f_{12}(n) \prec f_5(n) \asymp f_6(n) \prec f_3(n) \prec f_2(n) \prec f_1(n) \prec f_8(n) \prec f_4(n) \prec f_{10}(n) \prec f_{11}(n)$$

Да сравним $f_{11}(n)$ с $f_9(n)$. Твърдим, че $f_{11}(n) \prec f_9(n)$. Наистина,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{11}(n)}{f_9(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\binom{n}{2}}}{2^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\binom{n}{2}-n^2} = 0$$

Дотук имаме

$$f_{12}(n) \prec f_5(n) \asymp f_6(n) \prec f_3(n) \prec f_2(n) \prec f_1(n) \prec f_8(n) \prec f_4(n) \prec f_{10}(n) \prec f_{11}(n) \prec f_9(n)$$

И накрая да сравним $f_9(n)$ с $f_7(n)$. Твърдим, че $f_9(n) \prec f_7(n)$. За да покажем това, ще покажем, че $\lg f_9(n) \prec \lg f_7(n)$. Наистина,

$$\lg f_9(n) = n^2$$
$$\lg f_7(n) = 2^{\sqrt{n}}$$

Но $n^2 \prec 2^{\sqrt{n}}$, тъй като всяка полиномиално растяща функция расте асимптотично по-бавно от всяка експоненциално растяща функция съгласно изучаваното на лекции. Окончателната наредба е

$$f_{12}(n) \prec f_5(n) \asymp f_6(n) \prec f_3(n) \prec f_2(n) \prec f_1(n) \prec f_8(n) \prec f_4(n) \prec f_{10}(n) \prec f_{11}(n) \prec f_9(n) \prec f_7(n)$$

Задача 3: Разгледайте алгоритъма MaxNMin:

MaxNMin($A[1, \ldots, n]$: масив от цели числа, като $n \geq 2$ и n е четно)

1 $k \leftarrow \frac{n}{2}$
2 създай масиви $B[1, \ldots, k]$, $C[1, \ldots, k]$
3 **for** $i \leftarrow 1$ **to** k
4   **if** $A[2i-1] > A[2i]$
5         $B[i] \leftarrow A[2i-1]$, $C[i] \leftarrow A[2i]$
6   **else**
7         $B[i] \leftarrow A[2i]$, $C[i] \leftarrow A[2i-1]$
8 $\mathrm{tmpmax} \leftarrow B[1]$, $\mathrm{tmpmin} \leftarrow C[1]$
9 **for** $i \leftarrow 2$ **to** k
10   **if** $B[i] > \mathrm{tmpmax}$
11         $\mathrm{tmpmax} \leftarrow B[i]$
12   **if** $C[i] < \mathrm{tmpmin}$
13         $\mathrm{tmpmin} \leftarrow C[i]$
14 **return** $(\mathrm{tmpmax}, \mathrm{tmpmin})$

2 т. Кажете какво връща този алгоритъм.
30 т. Докажете това формално и прецизно.

Решение: MaxNMin връща наредената двойка $(\max(A[1, \ldots, n]), \min(A[1, \ldots, n]))$. Следва доказателството.

Лема 1 Когато изпълнението на алгоритъма дойде на ред 8, $\max(A[1, \ldots, n])$ се съдържа в $B[1, \ldots, k]$ и $\min(A[1, \ldots, n])$ се съдържа в $C[1, \ldots, k]$.

Доказателство: Следното твърдение е инвариант за цикъла на редове 3–7. При всяко достигане на ред 3:

- $\max(A[1, \ldots, 2i-2])$ се съдържа в $B[1, \ldots, i-1]$ и
- $\min(A[1, \ldots, 2i-2])$ се съдържа в $C[1, \ldots, i-1]$.

База: При първото достигане на ред 3, променливата i съдържа 1. Инвариантът става

- $\max(A[1, \ldots, 0])$ се съдържа в $B[1, \ldots, 0]$ и
- $\min(A[1, \ldots, 0])$ се съдържа в $C[1, \ldots, 0]$.

Но масивите $B[1, \ldots, 0]$ и $C[1, \ldots, 0]$ са празни, така че твърденията са верни в празния смисъл. По-подробно, $\max(A[1, \ldots, 0]) = -\infty$ и $\min(A[1, \ldots, 0]) = \infty$, понеже и $A[1, \ldots, 0]$ е празен, но, каквито и да са $\max(A[1, \ldots, 0])$ и $\min(A[1, \ldots, 0])$, имаме право да кажем, че се съдържат съответно в празните $B[1, \ldots, 0]$ и $C[1, \ldots, 0]$. ✓

Поддръжка: Да допуснем, че инвариантът е в сила при някое достигане на ред 3, което не е последното. Следните случаи са взаимно изключващи се и изчерпателни.

Случай 1: $A[2i-1] > A[2i]$, което е същото като $A[2i-1] = \max\{A[2i-1], A[2i]\}$ и $A[2i] = \min\{A[2i-1], A[2i]\}$. Условието на ред 4 е истина и се изпълнява ред 5. Тогава в $B[i]$ се записва $\max\{A[2i-1], A[2i]\}$, а в $C[i]$ се записва $\min\{A[2i-1], A[2i]\}$. Но по допускане имаме, че $\max(A[1,\ldots,2i-2])$ се съдържа в $B[1,\ldots,i-1]$ и $\min(A[1,\ldots,2i-2])$ се съдържа в $C[1,\ldots,i-1]$. Заключаваме, че $\max(A[1,\ldots,2i])$ се съдържа в $B[1,\ldots,i]$ и $\min(A[1,\ldots,2i])$ се съдържа в $C[1,\ldots,i]$.

След инкрементирането на i на ред 3 отново е вярно, че $\max(A[1,\ldots,2i-2])$ се съдържа в $B[1,\ldots,i-1]$ и $\min(A[1,\ldots,2i-2])$ се съдържа в $C[1,\ldots,i-1]$.

Случай 2: $A[2i-1] \leq A[2i]$, което е същото като $A[2i-1] = \min\{A[2i-1], A[2i]\}$ и $A[2i] = \max\{A[2i-1], A[2i]\}$. Това е в сила дори когато $A[2i-1] = A[2i]$.

Условието на ред 4 е лъжа и се изпълнява ред 7. Тогава в $B[i]$ се записва $\max\{A[2i-1], A[2i]\}$, а в $C[i]$ се записва $\min\{A[2i-1], A[2i]\}$. Но по допускане имаме, че $\max(A[1,\ldots,2i-2])$ се съдържа в $B[1,\ldots,i-1]$ и $\min(A[1,\ldots,2i-2])$ се съдържа в $C[1,\ldots,i-1]$. Заключаваме, че $\max(A[1,\ldots,2i])$ се съдържа в $B[1,\ldots,i]$ и $\min(A[1,\ldots,2i])$ се съдържа в $C[1,\ldots,i]$.

След инкрементирането на i на ред 3 отново е вярно, че $\max(A[1,\ldots,2i-2])$ се съдържа в $B[1,\ldots,i-1]$ и $\min(A[1,\ldots,2i-2])$ се съдържа в $C[1,\ldots,i-1]$.

Терминация: Да разгледаме последното достигане на ред 3. Тогава $i = k+1$. Замествайки в инварианта и спомняйки си, че $k = n/2$, получаваме

- $\max(A[1,\ldots,n])$ се съдържа в $B[1,\ldots,k]$ и
- $\min(A[1,\ldots,n])$ се съдържа в $C[1,\ldots,k]$.

Което и трябваше да докажем. □

Лема 2 Когато изпълнението на алгоритъма дойде на ред 14, променливата tmpmax съдържа максимума на $B[1,\ldots,n/2]$, а променливата tmpmin съдържа минимума на $C[1,\ldots,n/2]$.

Доказателство: Следното твърдение е инвариант за цикъла на редове 9–13. При всяко достигане на ред 9, tmpmax съдържа $\max B[1,\ldots,i-1]$ и tmpmin съдържа $\min C[1,\ldots,i-1]$.

База: При първото достигане на ред 9, променливата i съдържа 2. Инвариантът става "tmpmax съдържа $\max B[1,\ldots,1]$ и tmpmin съдържа $\min C[1,\ldots,1]$", което е същото като "tmpmax съдържа $\max B[1]$, а tmpmin съдържа $\min C[1]$". Но това е точно така заради присвояването на ред 8. ✓

Поддръжка: Да допуснем, че инвариантът е в сила при някое достигане на ред 9, което не е последното. Следните случаи са взаимно изключващи се и изчерпателни.

Случай 1: $B[i] > \text{tmpmax} \wedge C[i] < \text{tmpmin}$. Тогава, условията на ред 10 и ред 12 са истина и присвояванията на ред 11 и ред 13 се изпълняват. След тези присвоявания е вярно, че tmpmax съдържа $\max B[1,\ldots,i]$ и tmpmin съдържа $\min C[1,\ldots,i]$. След инкрементирането на i на ред 9, отново е вярно, че tmpmax съдържа $\max B[1,\ldots,i-1]$ и tmpmin съдържа $\min C[1,\ldots,i-1]$.

Случай 2: $B[i] > \mathrm{tmpmax} \wedge C[i] \geq \mathrm{tmpmin}$. Тогава, условието на ред 10 е истина, а условието на ред 12 е лъжа. Присвояването на ред 11 се изпълнява, а това на ред 13 не се изпълнява. Вярно е, че tmpmax съдържа $\max B[1, \ldots, i]$ и tmpmin съдържа $\min C[1, \ldots, i]$. След инкрементирането на i на ред 9, отново е вярно, че tmpmax съдържа $\max B[1, \ldots, i-1]$ и tmpmin съдържа $\min C[1, \ldots, i-1]$.

Случай 3: $B[i] \leq \mathrm{tmpmax} \wedge C[i] < \mathrm{tmpmin}$. Тогава, условието на ред 10 е лъжа, а условието на ред 12 е истина. Присвояването на ред 11 не се изпълнява, а това на ред 13 се изпълнява. Вярно е, че tmpmax съдържа $\max B[1, \ldots, i]$ и tmpmin съдържа $\min C[1, \ldots, i]$. След инкрементирането на i на ред 9, отново е вярно, че tmpmax съдържа $\max B[1, \ldots, i-1]$ и tmpmin съдържа $\min C[1, \ldots, i-1]$.

Случай 4: $B[i] \leq \mathrm{tmpmax} \wedge C[i] \geq \mathrm{tmpmin}$. Тогава, условията на ред 10 и ред 12 са лъжа и присвояванията на ред 11 и ред 13 не се изпълняват. Вярно е, че tmpmax съдържа $\max B[1, \ldots, i]$ и tmpmin съдържа $\min C[1, \ldots, i]$. След инкрементирането на i на ред 9, отново е вярно, че tmpmax съдържа $\max B[1, \ldots, i-1]$ и tmpmin съдържа $\min C[1, \ldots, i-1]$.

Терминация: Да разгледаме последното достигане на ред 9. Тогава $i = k + 1$. Замествайки в инварианта и спомняйки си, че $k = n/2$, получаваме "tmpmax съдържа $\max B[1, \ldots, n/2]$, а tmpmin съдържа $\min C[1, \ldots, n/2]$". Което и трябваше да докажем. $\square$

От Лема 1 и Лема 2 следва веднага, че наредената двойка $(\mathrm{tmpmax}, \mathrm{tmpmin})$, която алгоритъмът връща на ред 14, всъщност е $(\max(A[1, \ldots, n]), \min(A[1, \ldots, n]))$. Което и трябваше да докажем. $\square$