Домашно № 1 по дисциплината “Дискретни структури” за специалност “Информатика”, I курс, летен семестър на 2021/2022 уч. г. в СУ, ФМИ

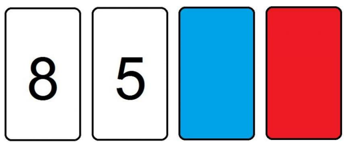
Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*10*	*30*	*30*	*30*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Всяка от четири карти за игра има число на лицевата си страна и цвят на гърба. Две от картите са поставени на масата с лицевата страна нагоре; виждат се числата 8 и 5. Другите две карти са с гърба нагоре; едната е синя, другата е червена.



Искаме да проверим дали е вярно твърдението: “Всяка карта с четно число има червен гръб.” Колко най-малко карти трябва да обърнем и кои са те?

Най-малкият брой карти е донякъде въпрос на късмет: може още първата обърната карта да опровергае твърдението. Разглеждаме най-лошия случай — когато твърдението е вярно; тогава трябва да обърнем най-много карти. Разбира се, можем да обърнем всичките четири карти, но това е излишно: някои карти не е нужно да обръщаме. В задачата се пита колко най-малко и точно кои карти трябва да обърнем в най-лошия случай — когато твърдението е истина (ала ние не знаем това отнапред).

Задачи от този вид се наричат минимаксни, защото в тях се търси минимум на максимум. В тази задача максимумът зависи от случая: коя карта потвърждава съждението и коя — не; а минимумът зависи от нашия избор: кои карти ще обърнем и кои ще пренебрегнем.

Предложете не само отговор, но и подробен анализ: за всяка от четирите карти се обосновете защо трябва или не трябва да бъде обърната.

Задача 2. Дайте пример за бинарна релация $R \subseteq A \times A$, дефинирана над подходящо избрано <u>крайно</u> непразно множество A, която притежава всички изброени свойства:

1) $\forall x \in A: \ \forall y \in A: \ xRy \to \neg\, yRx$;
2) $\forall x \in A: \ \exists y \in A: \ xRy$;
3) $\forall x \in A: \ \forall y \in A: \ (xRy \to \exists z \in A: \ xRz \wedge zRy)$.

За избраната от Вас релация R докажете, че тя настина има трите свойства.

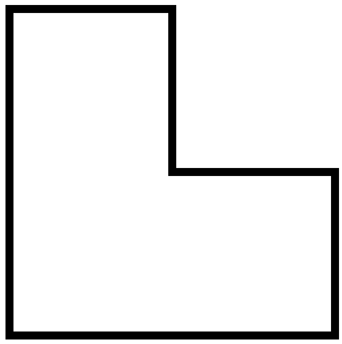
Задача 3. Функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворява неравенствата

$$f(x+19) \leq f(x) + 19 \ \text{ и } \ f(x+94) \geq f(x) + 94 \ \text{ за всяко } \ x \in \mathbb{R}.$$

Докажете, че $f(x+1) = f(x) + 1$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Да се докаже, че за всяко цяло число $n \geq 2$ показаната фигура може да се разбие на n фигури, всеки две от които са подобни помежду си, но не непременно на дадената фигура. Фигурите, съответстващи на едно и също (произволно) n, трябва да бъдат подобни помежду си; обаче фигурите, съответстващи на различни n, не е задължително да бъдат подобни.

Дадената фигура се състои от три еднакви квадрата, долепени във формата на буквата Г.



Опишете решението отначало неформално, а след това съставете строго доказателство. Всички разсъждения да бъдат описани с думи и онагледени с чертежи. Словесното описание не замества чертежите, нито чертежите — словесното описание.

Упътване: Тази задача се решава трудно при неправилен подход. Не е лесно да се намери прост начин за разрязване, който работи еднакво добре при всички допустими стойности на n. По-добре направете следното.

Отначало разрежете дадената фигура на някакъв малък брой фигури, всеки две от които са подобни (вкл. еднакви) помежду си, но не непременно на дадената фигура. После разрежете една от новите фигури на части, които са подобни на нея (следователно и на останалите фигури). Така ще увеличите стойността на n. Тази стъпка може да се повтори неограничено много пъти. Следователно получавате безкрайна редица от стойности на n, за които твърдението е доказано. Напишете първите няколко члена на редицата; всеки от тях трябва да бъде придружен с чертеж на съответното разрязване. Подредете чертежите отляво надясно по нарастващи стойности на n, така че да личи как всяко разрязване се получава от предишното. Това ще бъде неформалното описание на решението.

Повторението на една и съща стъпка представлява завоалирана математическа индукция. Формалното описание на решението се състои в строгото изложение на тази индукция. Съставете формула за общия член на получената редица, за да можете да изкажете строго твърдението, че първоначалната фигура може да се разбие на n подобни фигури за всяко n от редицата. После съставете строго доказателство на твърдението по метода на математическата индукция. Базата на индукцията ще съответства на първия член на редицата, а индуктивната стъпка — на прехода от един член към следващия чрез разрязване на една от частите.

Получената безкрайна редица може би няма да съдържа всички допустими стойности на n. Ако е така, повторете описаните етапи, за да получите нова безкрайна редица. Продължете така, докато решите задачата за всички допустими стойности на n.

СХЕМА ЗА ТОЧКУВАНЕ

Задача 1 носи 10 точки само ако е решена вярно и пълно. Грешен отговор носи 0 точки.

Задача 2 се оценява с 30 точки, разпределени по следния начин:
— за дефиниране на множеството A и релацията R: 15 точки;
— по 5 точки за всяко свойство, за което е доказано, че се притежава от R.
Дават се допълнителни 10 точки (извън предвидените 30) за намиране на безброй много релации.

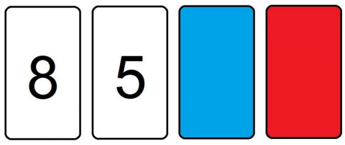
Задача 3 и **задача 4** носят по 30 точки, чието разпределение е указано в решенията.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Твърдението, подлежащо на проверка ("Всяка карта с четно число има червен гръб."), е всъщност една импликация:

"За всяка от четирите карти е вярно, че ако нейното число е четно, то гърбът ѝ е червен."

Както знаем, импликация с неверен антецедент е вярна, независимо какъв е нейният консеквент. Друго правило: импликация с верен консеквент е вярна, независимо какъв е нейният антецедент. Съществуват още две възможности: импликация с верен антецедент е равносилна на консеквента, а пък импликация с неверен консеквент е равносилна на отрицанието на антецедента.



За първата карта (осмицата) антецедентът е истина (числото осем е четно), а импликацията е равносилна на консеквента. Ето защо, за да разберем дали импликацията е истина за тази карта, трябва да проверим консеквента, тоест трябва да проверим дали гърбът на тази карта е червен. Затова се налага да обърнем първата карта.

За втората карта (петицата) антецедентът е неистина (числото пет не е четно), следователно импликацията е вярна, независимо какъв е консеквентът. Цветът на гърба на картата не е важен, поради което не е нужно да я обръщаме.

За третата карта (синята) консеквентът е неверен (гърбът ѝ не е червен), а импликацията е равносилна на отрицанието на антецедента. Тоест импликацията ще бъде истина за тази карта, ако и само ако числото на картата е нечетно. За да проверим това, трябва да обърнем картата.

За четвъртата карта (червената) консеквентът е верен (гърбът на картата е червен), затова импликацията е истина, независимо какъв е антецедентът. Тъй като няма никакво значение дали числото на картата е четно, то няма нужда да я обръщаме.

Отговор: Трябва да обърнем две карти — осмицата и синята карта.

Тази задача (включително картинката) е взета от следната страница в Интернет:
`https://www.obekti.bg/chovek/tazi-zadacha-s-karti-shche-proveri-logicheskite-vi-umeniya`

Задача 2. Първото от трите изисквания към релацията R може да се приложи както при $x = y$, така и при $x \neq y$. Следва, че R трябва да бъде антирефлексивна и антисиметрична релация.

Ако беше позволено множеството A да е безкрайно, задачата щеше да се реши много лесно: щяхме да вземем $A = \mathbb{R}$ (множеството на реалните числа), а R щеше да е релацията "по-малко". Тя е антирефлексивна и антисиметрична, тоест изпълнява първото изискване. Второто изискване също е удовлетворено: от всяко реално число има по-голямо. Третото свойство също е налице: между всеки две реални числа има друго реално число.

Трудността е да решим задачата за някое крайно множество A. Можем да направим това по няколко различни начина.

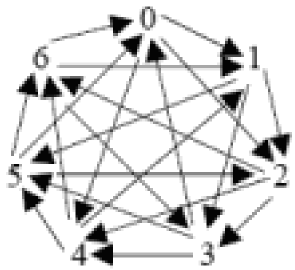
Първи начин (по идея на Добромир Кралчев): да използваме налучкване. Ако налучкването е съвсем сляпо, трудно ще уцелим решение. Обаче с помощта на разсъждения можем да избегнем много от излишните проби и грешки.

За нагледност да представим релацията R чрез ориентиран граф (а пък A е множеството от върховете на графа). Това, че R е антирефлексивна и антисиметрична (свойство 1), означава, че графът не съдържа примки, нито цикли с дължина 2. От свойство 2 следва, че от всеки връх излиза поне едно ребро. Ако започнем да пътешестваме в графа, все някога ще повторим връх, защото графът е краен (именно тук използваме това, че A е крайно множество). Следователно графът съдържа цикъл. От казаното по-горе следва, че дължината на този цикъл е поне 3.

Ето защо да тръгнем от ориентиран цикъл с три върха — a, b и c. Ребрата на цикъла сочат от a към b, от b към c и от c към a. Свойство 3 ни задължава да намерим връх z, такъв че да има ребра от c към z и от z към a. Това не може да е никой от върховете a и c: ще се получи примка. Не може да е и върхът b: ребрата (a, b) и (b, a) ще образуват цикъл с дължина 2. Налага се да добавим връх, например d, който да играе ролята на z от свойство 3, когато $x = c$ и $y = a$. Добавяме и ребра от c към d и от d към a.

Свойство 3 ни принуждава да добавяме нови върхове само докато графът е малък: никой от старите върхове не върши работа, затова добавяме нов връх. Когато върховете станат достатъчно много, се оказва, че за всеки два върха x и y свойство 3 може да бъде удовлетворено, ако в ролята на z използваме някой от старите върхове. В такъв случай добавяме само ребра.

Тръгвайки от цикъл с дължина 3 и добавяйки върхове и ребра възможно най-пестеливо, рано или късно ще стигнем вероятно до решението, показано на чертежа.



Втори начин (по идея на Стефан Фотев): да използваме остатъците при деление на $2^n - 1$ за някое цяло число $n \geq 3$. Тези остатъци образуват множеството A (те са върховете на графа). От всеки връх $x \in A$ излизат ребра към върховете $x + 1, \ x + 2, \ x + 4, \ x + 8, \ \ldots \ , \ x + 2^{n-1}$; всяко от вторите събираеми е поредната степен на двойката, а събирането е по модул $2^n - 1$. По-формално:

$$R = \Big\{ \Big(x, \ (x + 2^k) \bmod (2^n - 1)\Big) : \ x \in A \ \wedge \ k \in \mathbb{Z} \ \wedge \ 0 \leq k \leq n - 1 \Big\}.$$

Ще проверим, че тази релация R притежава трите желани свойства.

За да докажем първото свойство, да допуснем противното: че съществуват x и y от A, за които xRy и yRx. Тогава $y \equiv x + 2^k$ и $x \equiv y + 2^m$ за някои цели k и m от 0 до $n - 1$ вкл. Следователно $x \equiv x + 2^k + 2^m$, тоест $2^k + 2^m \equiv 0$, където всички сравнения са по модул $2^n - 1$. Последното сравнение означава, че $2^k + 2^m$ се дели на $2^n - 1$. Но сборът $2^k + 2^m$ е между числата $2^0 + 2^0 = 2$ и $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ включително. Само едно число в този интервал се дели на $2^n - 1$ и това е самото число $2^n - 1$. Следователно $2^k + 2^m = 2^n - 1$. По-нататък разглеждаме два случая:

— Нека $k = m$. Тогава последното равенство приема вида $2^{k+1} = 2^n - 1$. Дясната страна е нечетно число, защото $n \geq 3$. Лявата страна е четно число, защото $k \geq 0$, тоест $k + 1 \geq 1$. Получава се противоречие — равенство между четно и нечетно число.

— Нека $k \neq m$. Тогава числото $2^k + 2^m$ има две единици в двоичното си представяне — на позиции № k и № m. Двоичното представяне на числото $2^n - 1$ се състои от n единици и не съдържа нули. Тъй като двете числа трябва да бъдат равни, то $n = 2$, което противоречи на неравенството $n \geq 3$.

Второто свойство се доказва лесно: ако в определението на релацията R заместим $k = 0$, ще получим, че $xR(x + 1)$ за всяко $x \in A$ (сборът е по модул $2^n - 1$). Следователно за всяко $x \in A$ съществува $y \in A$ (а именно $y = x + 1$), такова че xRy.

Проверка на третото свойство: Нека xRy, тоест $y \equiv x + 2^k$ за някое цяло k от 0 до $n - 1$ вкл.

— Ако $k \geq 1$, то $0 \leq k - 1 < n - 1$, затова можем да положим $z = (x + 2^{k-1}) \bmod (2^n - 1)$. Затова $z \equiv x + 2^{k-1}$, откъдето следва, че xRz. Освен това, $y \equiv x + 2^k \equiv x + 2^{k-1} + 2^{k-1} \equiv z + 2^{k-1}$, тоест $y \equiv z + 2^{k-1}$, откъдето zRy.

— Ако $k = 0$, тоест $y \equiv x + 1$, полагаме $z = (x + 2^{n-1}) \bmod (2^n - 1)$. Тогава xRz. Освен това, $z + 2^{n-1} \equiv x + 2^{n-1} + 2^{n-1} = x + 2^n \equiv x + 1 \equiv y$, тоест $y \equiv z + 2^{n-1}$, откъдето zRy.

Това решение работи при всяко цяло число $n \geq 3$. При $n = 3$ графът на получената релация съвпада с графа, показан на картинката по-горе.

Трети начин (по идея на Емилиян Рогачев): използваме остатъците при деление на някакво нечетно $n \geq 7$, т.е. $A = \Big\{1;\ 2;\ 3;\ \dots\ ;\ n\Big\}$, където за удобство сме заменили остатъка 0 с n. Бинарна релация R над A с желаните свойства получаваме, като определим R по следния начин: $xRy \iff y$ е някое от числата $x+1,\ x+2,\ x+3,\ \dots\ ,\ x+\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1,\ x+\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ $\Big($без $x+\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\Big)$, където събирането е по модул n.

Първото изискване към релацията е изпълнено. Да допуснем противното: че има x и y от A, за които xRy и yRx. Тогава $y \equiv x+k$ и $x \equiv y+m$ по модул n за някои k и m измежду числата $1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ $\Big($без $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\Big)$. Следователно $x \equiv x+k+m$, тоест $k+m \equiv 0$ по модул n. Последното сравнение означава, че $k+m$ се дели на n. Тъй като k и m са положителни и по-малки от n, то $0 < k+m < 2n$, откъдето $k+m = n$. Не може k и m да са по-малки от $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, затова едното от тях е равно на $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Тогава другото събираемо е $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, защото n е нечетно. Получи се противоречие: $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ е недопустима стойност за k и m.

Второто изискване също е изпълнено: за всяко $x \in A$ полагаме $y = x+1$ по модул n.

Проверка на третото свойство: Нека xRy. Следователно $y \equiv x+k \pmod{n}$ за някое k измежду числата $1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ $\Big($без $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\Big)$.

— Ако събираемото k е някое от числата $2,\ 3,\ 4,\ \dots\ ,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$, полагаме $z = x + (k-1)$, където събирането е по модул n. Щом $k-1$ също е допустимо събираемо $\Big(1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\Big)$, следва, че xRz. Освен това, $z+1 \equiv x+(k-1)+1 = x+k \equiv y$, тоест $y \equiv z+1$ по модул n, затова zRy.

— Ако $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, полагаме $z = x + \Big(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\Big)$, като събирането е по модул n. Тогава xRz. Освен това, в сила е следната редица от сравнения: $z+2 \equiv x+\Big(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\Big)+2 = x+\Big(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\Big) \equiv y$, тоест $y \equiv z+2$ по модул n. Следователно zRy, тъй като 2 е допустимо събираемо. По-точно, 2 е цяло число и $1 \leq 2 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$. Последното неравенство е изпълнено за всяко цяло $n \geq 6$, а пък ние работим с нечетни числа $n \geq 7$.

— Ако $k = 1$, полагаме $z = x + \Big(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\Big)$, като събирането е по модул n. Ето защо xRz и са в сила сравненията $z + \Big(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\Big) \equiv x + \Big(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\Big) + \Big(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\Big) = x+n+1 \equiv x+1 \equiv y$, тоест $y \equiv z + \Big(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\Big)$ по модул n, откъдето следва, че zRy. В извършените преобразувания използвахме това, че n е нечетно число.

Окончателно, горните разсъждения важат за всяко нечетно $n \geq 6$, тоест трябва $n \geq 7$, ето защо поставихме това изискване от самото начало.

При $n = 7$ се получава графът от предишната страница.

Задача 3. Неравенството $f(x+19) \leq f(x)+19$ прилагаме 94 пъти:

$$f(x+94\,.\,19) \leq f(x+93\,.\,19)+19 \leq f(x+92\,.\,19)+2\,.\,19 \leq \ldots \leq f(x)+94\,.\,19, \tag{1}$$

а неравенството $f(x+94) \geq f(x)+94$ прилагаме 19 пъти:

$$f(x+19\,.\,94) \geq f(x+18\,.\,94)+94 \geq f(x+17\,.\,94)+2\,.\,94 \geq \ldots \geq f(x)+19\,.\,94. \tag{2}$$

Най-левият и най-десният израз в (1) и (2) образуват двете неравенства

$$f(x+94\,.\,19) \leq f(x)+94\,.\,19 \quad \text{и} \quad f(x+19\,.\,94) \geq f(x)+19\,.\,94. \tag{3}$$

Левите страни са равни и десните страни са равни, следователно има равенство:

$$f(x+19\,.\,94) = f(x)+19\,.\,94. \tag{4}$$

Ако допуснем, че поне на едно място във веригите (1) и (2) има строго неравенство, то ще следва, че съответното неравенство в (3) също е строго, а това би противоречило на равенството във формула (4). Следователно навсякъде във веригите (1) и (2) има равенства. По-конкретно, последното неравенство във всяка от веригите (1) и (2) става равенство:

$$f(x+19)+93\,.\,19 = f(x)+94\,.\,19 \quad \text{и} \quad f(x+94)+18\,.\,94 = f(x)+19\,.\,94. \tag{5}$$

Като опростим равенствата в (5), получаваме:

$$f(x+19) = f(x)+19 \quad \text{и} \quad f(x+94) = f(x)+94. \tag{6}$$

Първото равенство от формула (6) прилагаме пет пъти:

$$f(x+5\,.\,19) = f(x+4\,.\,19)+19 = f(x+3\,.\,19)+2\,.\,19 = \ldots = f(x)+5\,.\,19. \tag{7}$$

Най-левият и най-десният израз в (7) образуват равенството

$$f(x+95) = f(x)+95. \tag{8}$$

С помощта на второто равенство от формула (6) преобразуваме равенството (8) така:

$$f(x+95) = f(x+94)+1. \tag{9}$$

След полагането $y = x+94$ равенство (9) приема вида:

$$f(y+1) = f(y)+1. \tag{10}$$

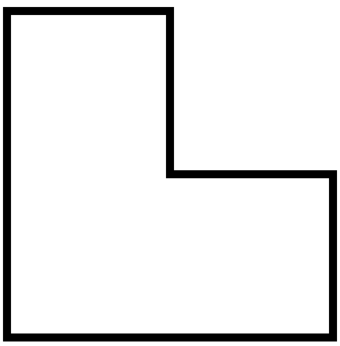
Формулите (1) – (9) важат за всяко реално число x. От полагането $y = x+94$ следва, че щом x е реално число, то и y е реално число. Оттук правим извода, че формула (10) важи за всяко реално число y, което може да се представи във вида $y = x+94$ за някое реално x. Това уравнение има реален корен x за всяко реално число y, а именно $x = y-94$. Следователно всяко реално число y може да се представи във вида $y = x+94$ за подходящо избрано реално x, а именно $x = y-94$. Ето защо формула (10) важи за всяко $y \in \mathbb{R}$, което трябваше да се докаже.

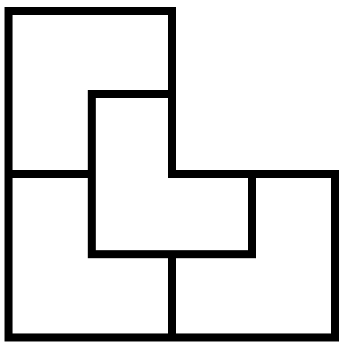
Тази задача е била дадена на XVII австрийско-полско състезание през 1994 г.

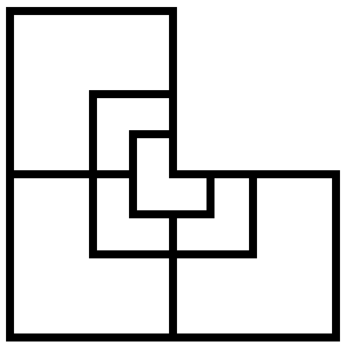
Точкуване: Всяка от формулите (1) – (10) с изключение на формула (5) носи по 3 точки. Формула (5) не носи точки. Още 3 точки се дават за разсъжденията след формула (10), с които се доказва, че тя важи за всяко реално число y.

Задача 4 (авторска — Добромир Кралчев). Искаме да докажем, че за всяко цяло $n \geq 2$ дадената фигура (на чертежа вляво) може да се раздели на n фигури, подобни помежду си.

За $n = 4$ разделянето е показано на чертежа в средата. Частите са еднакви една на друга и подобни на голямата фигура. Ако по същия начин разделим една от частите, ще получим общо седем фигури (на чертежа вдясно). Това действие може да се повтаря безкрай. Всеки път една фигура се дели на четири, затова броят на частите нараства с три. Тоест по този начин можем да разделим дадената фигура на 4, 7, 10, 13 части и т.н. Получената безкрайна редица е аритметична прогресия с първи член 4 и разлика 3. Тя съдържа целите положителни числа, които дават остатък 1 при деление на 3 (без числото 1), тоест съдържа числата от вида $n = 3k+1$, където k пробягва множеството на целите положителни числа.


дадената фигура


$n = 4$


$n = 7$

Разсъжденията дотук представляват неформално решение на частния случай $n \equiv 1 \pmod 3$. Формалното решение се основава на лема 1. За да я формулираме, въвеждаме следния термин: фигура от три еднакви квадрата, два от които са долепени до съседни страни на третия квадрат, наричаме Г-образна фигура. Дадената фигура е Г-образна. Всички Г-образни фигури са подобни, защото всички квадрати са подобни.

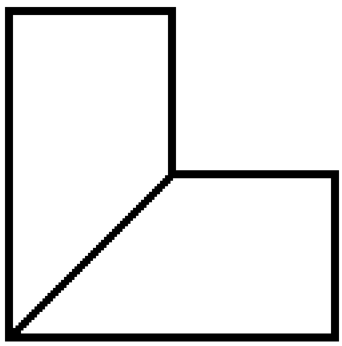
Лема 1: Всяка Г-образна фигура може да се разреже на $3k+1$ Г-образни фигури за всяко цяло положително число k.

Доказателство: с математическа индукция по k.

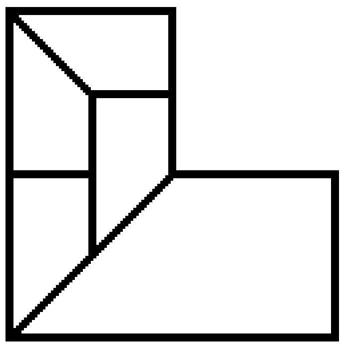
База: $k = 1$. Дадената фигура може да се разреже на $3k+1 = 4$ (четири) Г-образни фигури, както е показано на предишната страница, на чертежа в средата.

Индуктивна стъпка: Нека $k > 1$ и да предположим, че дадената фигура може да се разреже на $3(k-1)+1 = 3k-2$ Г-образни фигури. Разрязваме една от тях на четири части по начина от предишната страница, средния чертеж. Така се получават четири нови Г-образни фигури, а се губи една от старите — разрязаната. Следователно броят на Г-образните фигури става равен на $(3k-2)+4-1 = 3k+1$.

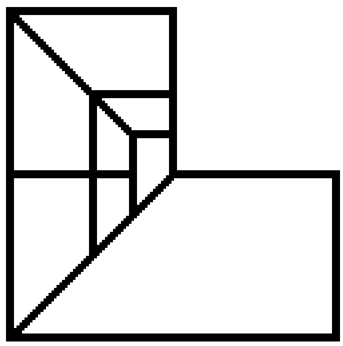
За $n = 2$ разделянето е показано на левия чертеж по-долу. Получените части са еднакви, следователно подобни една на друга, но не и на дадената Г-образна фигура. Ако една от тях разрежем на четири, както е показано на чертежа в средата, получените по-малки фигури са еднакви помежду си и подобни на разрязаната, значи са подобни и на неразрязаната част: всяка фигура е правоъгълен трапец. Дотук имаме разрязване на общо пет подобни фигури. Ако разрежем една от тях пак на четири правоъгълни трапеца, ще получим общо осем трапеца (на чертежа вдясно). Това действие се повтаря безкрай. Всеки път режем една фигура на четири, затова броят на частите нараства с три. По този начин разделяме дадената Г-образна фигура на 2, 5, 8, 11 части и т.н. — безкрайна аритметична прогресия с първи член 2 и разлика 3. Тя съдържа целите положителни числа, даващи остатък 2 при деление на 3, т.е. числата от вида $n = 3k+2$, където k пробягва множеството на целите неотрицателни числа.



$n = 2$



$n = 5$



$n = 8$

Горните разсъждения представляват неформално решение на частния случай $n \equiv 2 \pmod 3$. Формалното решение се основава на лема 2. За да я формулираме, въвеждаме следния термин: трапец с ъгли $90°$, $90°$, $45°$ и $135°$ и с голяма основа, два пъти по-дълга от малката основа, наричаме крило. Всяко крило се състои от правоъгълен равнобедрен триъгълник и квадрат, долепен външно за триъгълника по един от катетите. Всички крила са подобни многоъгълници: притежават съответно равни ъгли (с мерките, посочени в определението: $90°$, $90°$, $45°$ и $135°$) и съответно пропорционални страни $(1 : 1 : \sqrt{2} : 2)$.

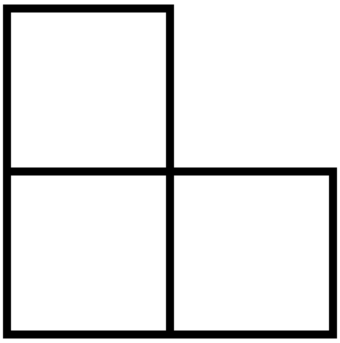
Лема 2: Всяка Г-образна фигура може да бъде разрязана на $3k+2$ крила за всяко цяло неотрицателно число k.

Доказателство: с математическа индукция по k.

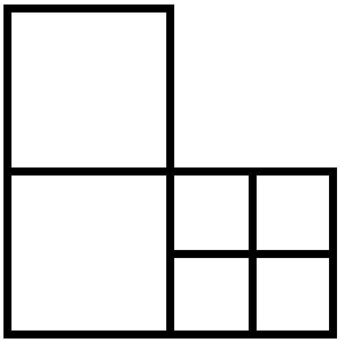
База: $k = 0$. Всяка Г-образна фигура може да бъде разрязана на $3k+2 = 2$ (две) крила, както е показано на чертежа вляво.

Индуктивна стъпка: Нека $k > 0$ и да предположим, че дадената фигура може да се разреже на $3(k-1)+2 = 3k-1$ крила. Разрязваме едно от тях на четири крила, както на средния чертеж. Така се получават четири нови крила, а се губи едно от старите — разрязаното крило. Ето защо броят на крилата става равен на $(3k-1)+4-1 = 3k+2$.

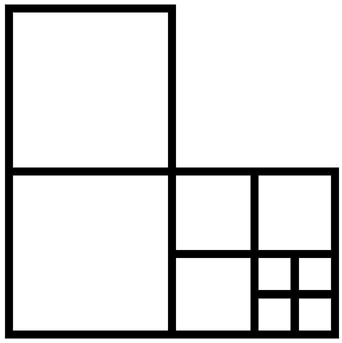
За $n = 3$ разделянето е показано на левия чертеж по-долу. Получените части са еднакви, следователно подобни една на друга, но не и на дадената Г-образна фигура. Ако една от тях разрежем на четири, както е показано на чертежа в средата, получените по-малки фигури са еднакви помежду си и подобни на разрязаната, значи са подобни и на неразрязаните части: всяка фигура е квадрат. Дотук имаме разрязване на шест квадрата. Ако разрежем един от тях на четири по-малки квадрата, ще получим общо девет квадрата (показани са на чертежа вдясно). Това действие може да се повтаря неограничено. Всеки път режем един от квадратите на четири, затова броят на частите нараства с три. По този начин разделяме дадената Г-образна фигура на 3, 6, 9, 12 части и т.н. — безкрайна аритметична прогресия с първи член 3 и разлика 3. Тя съдържа целите положителни числа, които се делят на 3 без остатък, т.е. числата от вида $n = 3k$, където k пробягва множеството на целите положителни числа.



$n = 3$



$n = 6$



$n = 9$

Горните разсъждения представляват неформално решение на частния случай $n \equiv 0 \pmod 3$. Формалното решение се основава на лема 3, както и на следния добре известен геометричен факт: всеки два квадрата са подобни.

Лема 3: Всяка Г-образна фигура може да бъде разрязана на $3k$ квадрата за всяко цяло положително число k.

Доказателство: с математическа индукция по k.

База: $k = 1$. Всяка Г-образна фигура може да бъде разрязана на $3k = 3$ (три) квадрата, както е показано на чертежа вляво.

Индуктивна стъпка: Нека $k > 1$ и да предположим, че дадената фигура може да се разреже на $3(k-1) = 3k - 3$ квадрата. Разрязваме един от тях на четири квадрата (средния чертеж). Така се получават четири нови квадрата, а се губи един от старите — разрязаният квадрат. Тоест броят на квадратите става равен на $(3k - 3) + 4 - 1 = 3k$.

Трите леми дават изчерпателно решение на задачата, защото обхващат всички случаи: всяко цяло положително число при деление на 3 дава един от разгледаните остатъци $(0, 1, 2)$.

Точкуване: Всеки от трите случая носи 10 точки: 5 т. за формалното и 5 т. за неформалното описание на решението. Петте точки се разпределят така: 2 т. за базата (първото разрязване); 3 т. за индуктивната стъпка (следващите разрязвания).