СЕМЕСТРИАЛНО КОНТРОЛНО ПО “ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ” ЗА СПЕЦИАЛНОСТ “ИНФОРМАТИКА” ВЪВ ФМИ НА СУ “СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”, ПРОВЕДЕНО НА 17 АПРИЛ 2022 ГОДИНА

Зад. 1. Докажете, че множеството от функциите от вида $f : \mathbb{N} \to \{0\,;\,1\}$ е неизброимо безкрайно.

Решение: Да означим с $\mathcal{F}$ множеството от функциите от вида $f : \mathbb{N} \to \{0\,;\,1\}$. За всяко $r \in \mathbb{N}$ дефинираме функция $g_r \in \mathcal{F}$, тоест функция от вида $g_r : \mathbb{N} \to \{0\,;\,1\}$, по следния начин:

$$g_r(n) = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = r; \\ 0, & \text{ако } n \neq r. \end{cases}$$

Нека $\mathcal{G} = \{g_r \,|\, r \in \mathbb{N}\}$. Тъй като $g_r \in \mathcal{F}$ за всяко $r \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Ако $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ и $a \neq b$, то $g_a(a) = 1 \neq 0 = g_b(a)$, тоест $g_a(a) \neq g_b(a)$, следователно $g_a \neq g_b$. Затова изображението $r \to g_r$ е биекция от $\mathbb{N}$ към $\mathcal{G}$. Ето защо множествата $\mathcal{G}$ и $\mathbb{N}$ са равномощни. Понеже множеството $\mathbb{N}$ е безкрайно, то $\mathcal{G}$ също е безкрайно. Тъй като $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, то $\mathcal{F}$ е безкрайно множество.

Да допуснем, че безкрайното множество $\mathcal{F}$ е изброимо. Следователно съществува биекция $k \to f_k$ от $\mathbb{N}$ към $\mathcal{F}$. Дефинираме функция от вида $h : \mathbb{N} \to \{0\,;\,1\}$, тоест $h \in \mathcal{F}$, по следния начин:

$$h(n) = 1 - f_n(n) \text{ за всяко } n \in \mathbb{N}.$$

Понеже $f_n(n) \in \{0\,;\,1\}$, $1 - 0 = 1$ и $1 - 1 = 0$, то $h(n) \in \{0\,;\,1\}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, тоест $h \in \mathcal{F}$. Ето защо $h = f_p$ за някое $p \in \mathbb{N}$. Следователно

$$f_p(n) = 1 - f_n(n) \text{ за всяко } n \in \mathbb{N}.$$

При $n = p$ получаваме равенството $f_p(p) = 1 - f_p(p)$, от което заключаваме, че $f_p(p) = \frac{1}{2} \notin \{0\,;\,1\}$. От друга страна, $f_p \in \mathcal{F}$, следователно $f_p(p) \in \{0\,;\,1\}$, което е противоречие.

Това противоречие показва, че допускането за изброимостта на множеството $\mathcal{F}$ не е било вярно. С други думи, безкрайното множество $\mathcal{F}$ е неизброимо.

Зад. 2. Нека A е крайно непразно множество. Нека $R \subseteq A \times A$ е релация на еквивалентност. Нека $C = \{[a] \,|\, a \in A\}$. Дефинираме релацията $S \subseteq C \times C$ така:

$$\forall x \forall y \in C \ (xSy \text{ тогава и само тогава, когато } \exists p \in x \ \ \exists q \in y : pRq).$$

а) Докажете или опровергайте, че S е релация на еквивалентност.
б) Докажете или опровергайте, че S е релация на частична наредба.

Решение: Обектите x и y от дефиницията на S са елементи на C, т.е. класове на еквивалентност на R. Тъй като $p \in x$ и $q \in y$, то $x = [p]$, $y = [q]$. Заместваме в дефиницията на S:

$$[p]S[q] \ \leftrightarrow \ pRq.$$

От определението за клас на еквивалентност:

$$pRq \ \leftrightarrow \ [p] = [q].$$

Следователно

$$[p]S[q] \ \leftrightarrow \ [p] = [q],$$

тоест

$$xSy \ \leftrightarrow \ x = y.$$

Това заключение важи за всички x и y от C, тоест S съвпада с релацията равенство.

Релацията равенство (тоест релацията S) е:
— рефлексивна, защото $x = x$ за всяко $x \in C$;
— симетрична, защото от $x = y$ следва $y = x$;
— антисиметрична, защото от $x = y$ и $y = x$ следва $x = y$;
— транзитивна, защото от $x = y$ и $y = z$ следва $x = z$.

а) Щом S е рефлексивна, симетрична и транзитивна, то тя е релация на еквивалентност.

б) Щом S е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна, то тя е релация на частична наредба.

Зад. 3. Докажете, че за всяко цяло число $n \geq 2$ е в сила неравенството

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{n} \cdot$$

Решение: Ще докажем твърдението с математическа индукция по n.

База: $n = 2$. Тогава неравенството приема вида

$$\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{2}, \text{ тоест } \frac{1}{4} < \frac{1}{2},$$

което е очевидно вярно.

Индуктивна стъпка: Да предположим, че $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{n}$ за някое цяло число $n \geq 2$. Ще докажем, че $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{n+1} \cdot$

Според индуктивното предположение $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(n+1)^2} + 1 - \frac{1}{n} \cdot$

Остава да докажем, че за всяко $n \geq 2$ важи неравенството $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^2} + 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} \cdot$

Като унищожим единиците, това неравенство приема следния вид: $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \cdot$

Чрез еквивалентни преобразувания ще го сведем до очевидно неравенство; по този начин доказателството ще бъде завършено.

Най-напред привеждаме дробите в лявата страна към общ знаменател: $\displaystyle\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} \cdot$

После се освобождаваме от знаменателите, умножавайки неравенството по $n(n+1)^2 > 0$. Така то приема формата $n(n+2) < (n+1)^2$. Разкриваме скобите: $n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$. След унищожаване на еднаквите събираеми получаваме очевидното неравенство $0 < 1$. От него по обратния път следва желаното неравенство.

С това индуктивното доказателство е завършено.

Задачата може да се реши и без използването на математическа индукция. За $k \geq 2$ важат неравенствата $k^2 > k^2 - k > 0$, следователно $\displaystyle\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

и $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n},$

тоест $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{n} \cdot$

Зад. 4. В новия избираем курс "Електронно управление на позитронни стратегии за фотонно бъдеще" за бакалаври са се записали 30 студенти. Докажете или опровергайте, че поне едно от следните е вярно:

- Записали са се поне 10 първокурсници.
- Записали са се поне 9 второкурсници.
- Записали са се поне 8 третокурсници.
- Записали са се поне 6 четвъртокурсници.

Решение: Ще докажем, че поне едно от четирите съждения е вярно. Да допуснем противното. Щом твърдим включваща дизюнкция от съждения, то според обобщения закон на Де Морган противното твърдение е конюнкцията от техните отрицания. А именно:

- Записали са се най-много 9 първокурсници
- и са се записали най-много 8 второкурсници,
- и са се записали най-много 7 третокурсници,
- и са се записали най-много 5 четвъртокурсници.

Следователно в новия избираем курс са се записали не повече от $9+8+7+5 = 29$ бакалаври, а по условие са се записали общо 30 бакалаври. Достигаме до противоречието $30 \leq 29$. Това показва, че допускането не е вярно. С други думи, поне едно от дадените четири съждения е истина.

Зад. 5. Нека $n \in \mathbb{N}^+$ и $f : \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,\ldots\,;\,n\} \to \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,\ldots\,;\,n\}$ е биекция. Нека n е нечетно число. Докажете, че произведението

$$\prod_{k=1}^{n} \left| k - f(k) \right|$$

е четно.

Допълнителен въпрос: Условието n да е нечетно дали е съществено за тази задача?

Решение: Да допуснем противното: съществува нечетно естествено n, за което произведението $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left| k - f(k) \right|$ е нечетно. Тогава всички множители $k - f(k)$ са нечетни, затова числото $f(k)$ е четно за всяко нечетно k. Сред целите числа от 1 до n включително има точно $\dfrac{n+1}{2}$ нечетни и $\dfrac{n-1}{2}$ четни. Понеже $\dfrac{n+1}{2} = \dfrac{n-1}{2} + 1$, то нечетните числа са с едно повече от четните. От принципа на Дирихле правим извод, че някое четно число притежава поне два първообраза измежду нечетните числа. Ето защо функцията f не е инекция, а това противоречи на условието на задачата — че f е биекция.

Противоречието означава, че допускането не е вярно. Тоест произведението $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left| k - f(k) \right|$ е четно.

Изискването n да е нечетно число е съществено. За всяко четно $n > 2$ да разгледаме функцията

$$f(k) = \begin{cases} k-1, & \text{ако } k \text{ е четно;} \\ k+1, & \text{ако } k \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

Непосредствено се проверява, че ако k е цяло число и $1 \leq k \leq n$, то $f(k)$ е цяло число и $1 \leq f(k) \leq n$. Тоест f е функция от вида $f : \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,\ldots\,;\,n\} \to \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,\ldots\,;\,n\}$. Освен това f е биекция, защото има обратна функция. По-точно, f е обратна на себе си, тоест $f(f(k)) = k$ за всяко допустимо k: $f(f(k)) = f(k+1) = (k+1) - 1 = k$ за нечетни k; $f(f(k)) = f(k-1) = (k-1) + 1 = k$ за четни k. Множителите са единици: $\left| k - f(k) \right| = \left| k - (k \pm 1) \right| = \left| \mp 1 \right| = 1$. Затова произведението е единица, тоест нечетно число.

Зад. 6. Дадени са цели положителни числа $n_1, \dots, n_k$ и n, такива че $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$. Освен това са дадени цели положителни числа $m_1, \dots, m_t$, такива че $\sum\limits_{i=1}^{t} m_i = n_k$. Докажете <u>с комбинаторни разсъждения</u>, че

$$\binom{n}{n_1\,,\, n_2\,,\, \dots\,,\, n_k} \binom{n_k}{m_1\,,\, m_2\,,\, \dots\,,\, m_t} = \binom{n}{n_1\,,\, n_2\,,\, \dots\,,\, n_{k-1}\,,\, m_1\,,\, m_2\,,\, \dots\,,\, m_t}.$$

Решение: Да си представим обикновено множество S с мощност n и мултимножество M, което се получава от S чрез фиксирано разбиване $\{C_1\,,\, C_2\,,\, \dots\,,\, C_k\}$ на S, такова че $\left|C_i\right| = n_i$ за всяко i, като елементите на всяко C_i стават неразличими. Както е известно, броят на пермутациите на M е равен на $\binom{n}{n_1\,,\, n_2\,,\, \dots\,,\, n_k}$.

Разглеждаме мултимножество M', получено от M и фиксирано разбиване $\{D_1\,,\, D_2\,,\, \dots\,,\, D_t\}$ на C_k, такова че $\left|D_i\right| = m_i$ за всяко i, като елементите на всяко D_i са неразличими помежду си, както досега; обаче елементите на D_i и D_j стават различими при $i \neq j$. От всяка пермутация на M се получават $\binom{n_k}{m_1\,,\, m_2\,,\, \dots\,,\, m_t}$ пермутации на M' чрез разместване на елементите на C_k един с друг. Ето защо броят на пермутациите на M' е равен на $\binom{n}{n_1\,,\, n_2\,,\, \dots\,,\, n_k}\binom{n_k}{m_1\,,\, m_2\,,\, \dots\,,\, m_t}$, което е лявата страна на тъждеството.

Ключовото наблюдение е, че можем да получим M' от S направо — без да минаваме през M. Разглеждаме фиксираното разбиване $\{C_1\,,\, C_2\,,\, \dots\,,\, C_{k-1}\,,\, D_1\,,\, D_2\,,\, \dots\,,\, D_t\}$ на S, $\left|C_i\right| = n_i$, $\left|D_j\right| = m_j$, като елементите на всяко C_i стават неразличими и елементите на всяко D_j също стават неразличими. Броят на пермутациите на M' е равен на $\binom{n}{n_1\,,\, n_2\,,\, \dots\,,\, n_{k-1}\,,\, m_1\,,\, m_2\,,\, \dots\,,\, m_t}$, което е дясната страна на тъждеството.

Доказахме тъждеството, преброявайки по два начина едни и същи обекти — пермутациите на M'.

ТОЧКУВАНЕ

Задача 1 носи 20 точки, разпределени по следния начин:
— за доказателство, че множеството е безкрайно: 5 точки;
— за доказателство, че множеството е неизброимо: 15 точки.

Задача 2 носи 20 точки, разпределени според начина на решаване на задачата:

Ако се използва, че S съвпада с равенството:
— за отбелязване на този факт: 4 точки;
— за доказването му: 10 точки;
— по 1 точка за всяко свойство на S;
— по 1 точка за верен отговор на всяко подусловие.

Ако не се използва, че S съвпада с равенството:
— за рефлексивността: 4 точки;
— за симетричността: 4 точки;
— за антисиметричността: 4 точки;
— за транзитивността: 6 точки;
— по 1 точка за верен отговор на всяко подусловие.

Задача 3 носи 20 точки:
— за базата на индукцията: 3 точки;
— за индуктивната стъпка: 17 точки, в това число: 7 точки за формулиране на неравенство, чиито суми имат постоянна дължина; и 10 точки за доказването на това неравенство.

Задача 4 носи 10 точки. По нея не се очакват частични решения.

Задача 5 носи 25 точки. Допълнителният въпрос носи още 10 точки.

Задача 6 се оценява с 25 точки.