

**РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ ИЗПИТА
ПО “ДИЗАЙН И АНАЛИЗ НА АЛГОРИТМИ”
(ПОПРАВИТЕЛНА СЕСИЯ — СУ, ФМИ, 27 ЮНИ 2017 Г.)**

Задача 1. В клетките на електронна таблица са въведени формули. Например, ако в клетката B8 е написана формулата “= A4 + C7 – 2 * D9”, то трябва първо да се пресметнат стойностите на клетките A4, C7 и D9, а след това — на B8. Предложете възможно най-бърз алгоритъм, който да определя в какъв ред да се изчисляват стойностите на клетките. Опишете алгоритъма словесно.

Решение: Моделираме задачата чрез ориентиран граф: върхове са клетките, ребра са зависимостите между клетките. По-точно, ако формулата в клетката X се позовава на стойността на клетката Y, то графът съдържа ребро от Y към X. В задачата се търси такова подреждане на върховете (клетките), че всяка клетка да предхожда всички клетки, зависещи от нея. Затова задачата се решава с помощта на известния алгоритъм за *топологично сортиране*, който извършва *обхождане в дълбочина*. Времевата сложност е $\Theta(m+n)$, където n е броят на върховете, а m е броят на ребрата на графа.

Задача 2. Оценете по порядък времевата сложност на алгоритъма:

```
P(A[1...n]: array of integers)
s ← 15
for k ← n downto 1 do
    s ← s + A[k] - P(A[1...k-1])
return s
```

Решение: Времевата сложност $T(n)$ удовлетворява рекурентното уравнение

$$T(n) = a + \sum_{k=1}^n (T(k-1) + b), \text{ където } a \text{ е времето за присвояването на ред № 1,}$$

b е времето за събирането, изваждането и присвояването в тялото на цикъла.

Заместваме n със $n-1$:
$$T(n-1) = a + \sum_{k=1}^{n-1} (T(k-1) + b).$$

Изваждаме новото уравнение от първоначалното: $T(n) - T(n-1) = T(n-1) + b$, тоест $T(n) = 2T(n-1) + b$, което е линейно-рекурентно уравнение. Решаваме го с помощта на характеристично уравнение и намираме характеристични корени 2 от хомогенната част и 1 от нехомогенната. Затова $T(n) = C_1 2^n + C_2 = \Theta(2^n)$.

Задача 4. Професор има n научни публикации. Масивът $A[1..n]$ съдържа данни за това, колко пъти всяка от тях е била цитирана от други учени; тоест $A[k]$ е броят на цитиранията на k -тата публикация. Предложете алгоритъм за пресмятане на т. нар. h -индекс — най-голямото цяло h , за което е вярно, че професорът има поне h публикации, всяка от които е цитирана поне h пъти.

Алгоритъм с времева сложност $T(n) = O(n \log n)$ се оценява с 20 точки; за сложност $T(n) = O(n)$ се дават 40 точки. За по-бавни алгоритми: 0 точки.

Опишете алгоритъма с думи и го демонстрирайте. Анализирайте сложността.

Решение: *Първи алгоритъм:* За време $\Theta(n \log n)$ **сортираме** масива A в намаляващ ред с някой бърз алгоритъм, например пирамидално сортиране. После за време $O(n)$ намираме (чрез последователно или двоично търсене) най-голямото h , за което $A[h] \geq h$. Времето на целия алгоритъм се определя от по-бавния етап — първия; т.е. времевата сложност е $\Theta(n \log n)$.

Вторият алгоритъм е модификация на първия. Ускоряваме първия етап до време $\Theta(n)$ с помощта на **сортиране чрез броене**. То не бива да се прилага направо върху оригиналните данни (те може да са много големи цели числа). Но ако заменим с n всички числа, по-големи от n , това няма да повлияе на h . Сега вече числата са малки в сравнение с n , затова можем да приложим това сортиране. На практика няма нужда да променяме оригиналните данни.

```

hIndex(A[1..n]: array of non-negative integers): integer
C[0..n]: array of non-negative integers // честоти
for k ← 0 to n do
    C[k] ← 0
for k ← 1 to n do
    if A[k] > n
        C[n] ← C[n] + 1
    else
        C[A[k]] ← C[A[k]] + 1
S ← 0
k ← n + 1
while k > S do
    k ← k - 1
    S ← S + C[k]
return k

```

Времевата сложност на първите два цикъла е $\Theta(n)$, а на третия цикъл е $O(n)$, защото броячът k намалява с единица на всяка стъпка, а цикълът завършва най-късно при $k = 0$. Затова сложността по време на целия алгоритъм е $\Theta(n)$.

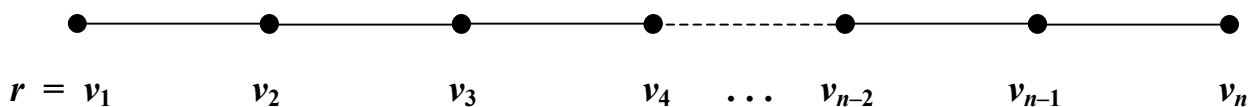
Трети алгоритъм — с време $\Theta(n)$: Намираме медианата с *алгоритъма PICK*. После разбиваме масива: поставяме големите елементи наляво от медианата, а малките — надясно. Нека k е новият индекс на медианата. Следва рекурсия: ако $A[k] \geq k$, то $h \geq k$ и търсенето продължава в дясната половина на масива; ако $A[k] < k$, то $h < k$ и търсенето продължава в лявата половина на масива; т.е. извършваме *двоично търсене*. Дъно на рекурсията: масив с един елемент. При достигане на дъното: ако $A[k] \geq k$, то $h = k$; ако $A[k] < k$, то $h = k - 1$.

Анализ: $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n$; събираемото n е времето на алгоритъма PICK, другото събираемо е времето за рекурсията. От мастър-теоремата $T(n) = \Theta(n)$.

Задача 3. За $\forall n$ намерете граф G с n върха и връх $r \in G$, та ако обходим G от върха r , стекът на обхождането в дълбочина да има $n - 1$ върха в някой миг, а опашката на обхождането в ширина винаги да има най-много един връх.

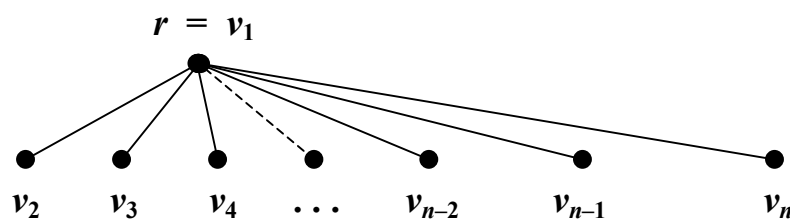
Намерете друг граф G и връх $r \in G$, но сега стекът винаги да е с максимум два върха, а опашката да има $n - 1$ върха в някой миг.

Решение: Нека G е следният граф:



Ако пуснем търсенето в ширина от върха $r = v_1$, то опашката ще съдържа най-много един връх на графа във всеки миг от изпълнението на алгоритъма: ако текущият връх е v_i , той ще бъде изваден от опашката, а на негово място ще бъде добавен единственият му непосетен досега наследник — върхът v_{i+1} . Ако от r пуснем търсене в дълбочина, то при достигане до върха v_n стекът ще съдържа $n - 1$ върха: v_1, v_2, \dots, v_{n-1} .

Сега да разгледаме друг граф:



Ако от върха $r = v_1$ пуснем търсене в дълбочина, то r ще се намира в стека през цялото време, а върховете v_2, v_3, \dots, v_n последователно ще се добавят и изваждат от стека, затова във всеки миг в стека ще има най-много два върха. Ако от r пуснем търсене в ширина, то когато алгоритъмът добави върха v_n , в опашката ще има $n - 1$ върха: v_2, v_3, \dots, v_n .

Задача 5. По дадени цели положителни числа A_1, A_2, \dots, A_n и B намерете броя на решенията на уравнението

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = B$$

в цели неотрицателни числа, тоест броя на наредените n -орки (x_1, x_2, \dots, x_n) от цели неотрицателни числа, които удовлетворяват уравнението.

Предложете итеративен алгоритъм. Опишете го на псевдокод като функция `numSolEq(A[1...n]: array of int, B: int): int`

с време $O(nB)$ и динамична таблица с $O(nB)$ клетки. **(10 точки)**

Демонстрирайте алгоритъма при $A = (2; 3; 5)$ и $B = 9$. **(10 точки)**

Оптимизирайте сложността по памет до динамична таблица с $O(B)$ клетки.

Опишете оптимизирания алгоритъм на псевдокод. **(10 точки)**

Решение:

```

numSolEq(A[1...n]: array of int, B: int): int
dyn[0...n][0...B]: array of int
for  $\tilde{n} \leftarrow 0$  to  $n$  do
    dyn[ $\tilde{n}$ ][0]  $\leftarrow$  1
for  $\tilde{B} \leftarrow 1$  to  $B$  do
    dyn[0][ $\tilde{B}$ ]  $\leftarrow$  0
for  $\tilde{n} \leftarrow 1$  to  $n$  do
    for  $\tilde{B} \leftarrow 1$  to  $B$  do
        if  $A[\tilde{n}] > \tilde{B}$ 
            dyn[ $\tilde{n}$ ][ $\tilde{B}$ ]  $\leftarrow$  dyn[ $\tilde{n}-1$ ][ $\tilde{B}$ ]
        else
            dyn[ $\tilde{n}$ ][ $\tilde{B}$ ]  $\leftarrow$  dyn[ $\tilde{n}-1$ ][ $\tilde{B}$ ] + dyn[ $\tilde{n}$ ][ $\tilde{B}-A[\tilde{n}]$ ]
return dyn[n][B]

```

Предпоследният ред се основава на правилото за събиране: всички решения на уравнението $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = B$ в цели неотрицателни числа са два вида — такива, в които $x_n = 0$ (броят им се дава от първото събираемо), и такива, в които $x_n > 0$ (второто събираемо, т.е. броят на решенията на уравнението $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n y = B - A_n$ в цели неотрицателни числа, където е положено $y = x_n - 1$).

Демонстрация на алгоритъма при $A = (2; 3; 5)$ и $B = 9$:

dyn	$\tilde{B} = 0$	$\tilde{B} = 1$	$\tilde{B} = 2$	$\tilde{B} = 3$	$\tilde{B} = 4$	$\tilde{B} = 5$	$\tilde{B} = 6$	$\tilde{B} = 7$	$\tilde{B} = 8$	$\tilde{B} = 9$
$\tilde{n} = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\tilde{n} = 1$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$\tilde{n} = 2$	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2
$\tilde{n} = 3$	1	0	1	1	1	2	2	2	3	3

В клетката $\text{dyn}[\tilde{n}][\tilde{B}]$ се пази броят на решенията на уравнението $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_{\tilde{n}} x_{\tilde{n}} = \tilde{B}$ в цели неотрицателни числа.

От долния десен ъгъл $\text{dyn}[n][B]$, тоест $\text{dyn}[3][9]$, се получава отговорът на задачата. Следователно уравнението $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9$ има три решения в цели неотрицателни числа.

Оптимизация по памет може да се постигне, като се пази само един ред от динамичната таблица.

```

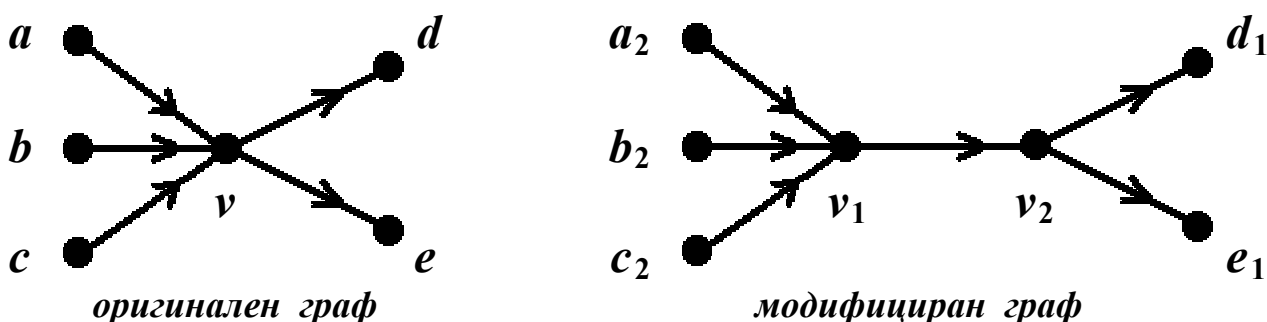
numSolEq(A[1...n]: array of int, B: int): int
dyn[0...B]: array of int
dyn[0] ← 1
for  $\tilde{B} \leftarrow 1$  to B do
    dyn[ $\tilde{B}$ ] ← 0
for  $\tilde{n} \leftarrow 1$  to n do
    for  $\tilde{B} \leftarrow A[\tilde{n}]$  to B do
        dyn[ $\tilde{B}$ ] ← dyn[ $\tilde{B}$ ] + dyn[ $\tilde{B} - A[\tilde{n}]$ ]
return dyn[B]

```

Сложността по време обаче остава $\Theta(nB)$ в най-лошия случай, колкото е при първата версия. Вложеният цикъл прави малка оптимизация на времето: то намалява при големи коефициенти на уравнението, но това е най-добрият, а не най-лошият случай.

Задача 6. Докажете, че задачата за разпознаване, дали даден ориентиран граф съдържа хамилтонов цикъл, остава NP-пълна, когато графът е двуделен.

Решение: Общият случай (произволен граф) чрез полиномиална редукция се свежда до разглеждания частен случай (двуделен граф). Редукцията се състои в разцепването на всеки връх v на два нови върха — v_1 и v_2 . Ребрата, които преди разцепването влизат във v , след разцепването влизат във v_1 . Ребрата, които преди разцепването излизат от v , след разцепването излизат от v_2 . Освен това се добавя ребро от v_1 към v_2 .



Модифицирането става с едно обхождане на графа, т.е. нужно е линейно (значи, полиномиално) време. При по-внимателно реализиране — копиране на указателите към списъците Adj, а не на самите списъци — даже няма нужда от обхождане на ребрата, затова времевата сложност е $\Theta(n)$, а не $\Theta(m + n)$.

Коректността на редукцията следва от два факта:

- 1) Модифицираният граф е двуделен. Доказателството се състои в оцветяването на върховете му в два цвята — цвят 1 и цвят 2 (индексите на върховете). Графът е двуделен, тъй като по построение всяко ребро свързва върхове с различни цветове.
- 2) Оригиналния граф съдържа хамилтонов цикъл тогава и само тогава, когато модифицираният граф съдържа хамилтонов цикъл. Доказателството следва чрез биекция между множествата от хамилтоновите цикли в двата графа. На всеки хамилтонов цикъл в оригиналния граф съответства хамилтонов цикъл в модифицирания граф, получен чрез удвояване на всеки връх и добавяне на индекси 1 и 2 пред първия и втория екземпляр съответно. (Само последният връх не се удвоява.)

Пример: Ако $pavdxp$ е хамилтонов цикъл в оригиналния граф, то $p_1p_2a_1a_2v_1v_2d_1d_2x_1x_2p_1$ е хамилтонов цикъл в модифицирания граф.

Изображението е инекция, защото всяка промяна на върховете в първия цикъл води до съответна промяна на върховете във втория цикъл, тоест на различни хамилтонови цикли в оригиналния граф съответстват различни хамилтонови цикли в модифицирания граф.

Хамилтоновите цикли в модифицирания граф по построение се състоят само от двойки върхове, именувани с еднакви букви, но с различни индекси, като индексите 1 и 2 се редуват (защото модифицираният граф е двуделен). От всеки хамилтонов цикъл в модифицирания граф можем да получим хамилтонов цикъл в оригиналния граф, изтривайки индексите, а после — и втория екземпляр от всяка буква.

Пример: Ако $p_1 p_2 a_1 a_2 v_1 v_2 d_1 d_2 x_1 x_2 p_1$ е хамилтонов цикъл в модифицирания граф, то $pavdxp$ е хамилтонов цикъл в оригиналния граф.

Затова описаното изображение е сюрекция. Щом то е инекция и сюрекция, следва, че е биекция. Значи, в оригиналния граф има хамилтонов цикъл тогава и само тогава, когато в модифицирания граф има хамилтонов цикъл. С това е доказана коректността на описаната полиномиална редукция.

Дотук видяхме, че задачата, дали двуделен граф е хамилтонов, е NP-трудна. Остава да докажем, че тя е от класа NP, тоест че предложено решение (пермутация на върховете, описваща предполагаем хамилтонов цикъл) може да бъде проверено (дали наистина е такъв цикъл) за полиномиално време.

```

Check (G (V,E): bipartite graph; // n = |V|, m = |E|
      Certificate: array[1...n] of vertices)
Visited: array[1...n] of bool
for k ← 1 to n do
    Visited[k] ← false
for k ← 1 to n do
    Visited[Certificate[k]] ← true
for k ← 1 to n do
    if Visited[k] = false
        return false // цикълът пропуска връх
for k ← 1 to n-1 do
    if Certificate[k+1] ∉ Adj (Certificate[k])
        return false // цикълът минава по липсващо ребро
if Certificate[1] ∉ Adj (Certificate[n])
    return false // цикълът минава по липсващо ребро
return true

```

Проверката за принадлежност на ребро към списък Adj изисква обхождане на списъка. Последният цикъл (с проверката след него) обхожда списъците на всички върхове, затова времето му е $\Theta(m + n)$. Останалите три цикъла изразходват време $\Theta(n)$. Времето за цялата проверка е линейно: $\Theta(m + n)$, следователно полиномиално. Затова разглежданата задача е от класа NP.