Домашно № 4 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2016/2017 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*10*	*10*	*10*	*10*	*40*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Както е известно от органичната химия, хомоложният ред на алканите започва така: метан $\mathrm{CH_4}$, етан $\mathrm{C_2H_6}$, пропан $\mathrm{C_3H_8}$, бутан $\mathrm{C_4H_{10}}$ и т.н. В общия случай важи молекулната формула $\mathrm{C}_n\mathrm{H}_{2n+2}$, както за молекулите с права верига, така и за тези с разклонена верига.

Докажете това твърдение. С други думи, докажете, че всички наситени ациклични въглеводороди с n въглеродни атома (независимо дали веригата им е права или разклонена) съдържат точно $2n+2$ водородни атома. За тази цел:

а) формулирайте задачата на езика на теорията на графите; **(5 точки)**

б) докажете съответното твърдение за графи без математическа индукция. **(5 точки)**

Задача 2. Решете предишната задача чрез математическа индукция.

Задача 3. Правоъгълен участък земя е разделен на двадесет и седем квадратни парцела, разположени в три реда, по девет парцела на ред. За всеки парцел има две възможности: върху него да бъде построена сграда или да бъде оставен незастроен. С цел благоустройство е забранено застрояването на съседни парцели. Два парцела са съседни, ако имат обща страна или общ връх. По колко начина може да бъде застроен правоъгълният терен? (Броят на сградите не е даден. В частност може да няма нито една сграда.) Изчислете отговора докрай и опишете пресмятанията подробно.

Упътване: Покажете, че има пет варианта за всеки стълб 3×1 на правоъгълния терен. Ще казваме, че два варианта са съвместими, ако два съседни стълба могат да бъдат застроени по съответните два начина. Представете релацията съвместимост чрез граф с пет върха. Формулирайте и решете подходяща задача за този граф.

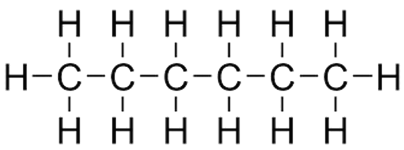
Задача 4. Предишната задача може да бъде решена и с помощта на динамично програмиране. Дефинираме матрица $A = \left(a_{ij}\right)$ с пет реда и девет стълба: $a_{ij} =$ броя на начините, по които може да бъде застроен правоъгълен терен, разделен на $3j$ парцела — в три реда, по j на ред, — ако за последния (j-тия) стълб се използва i-тият вариант, $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 9$.

Съставете рекурентна формула за a_{ij} и с нейна помощ попълнете матрицата A. Оттук намерете броя на начините за застрояване на правоъгълник 3×9. Изчислете отговора докрай и опишете пресмятанията подробно.

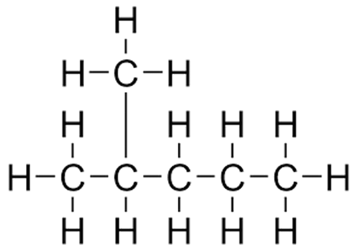
Указания по задача 1.

В органичните съединения въглеродът е от четвърта валентност, а водородът — от първа. Тоест всеки въглероден атом е свързан с четири други атома (въглеродни или водородни), а всеки водороден атом е свързан с един (въглероден) атом.

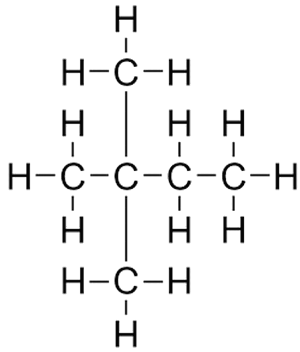
Верига от n въглеродни атома може да има различна структура. Например при $n = 6$ съществуват възможности като следните:



нормален хексан



2-метилпентан

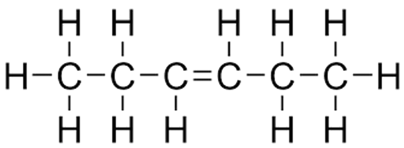


2,2-диметилбутан

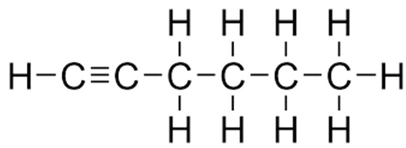
Тези и други подобни молекули с по $n = 6$ въглеродни атома имат $2n + 2 = 14$ водородни атома. Затова тези химични съединения имат една и съща молекулна формула: C_6H_{14} .

В задачата се иска доказателство на това свойство (че броят на водородните атоми не зависи от строежа на въглеродната верига) за общия случай, т.е. за произволно n.

Твърдението не важи за ненаситени въглеводороди — такива с кратни връзки.



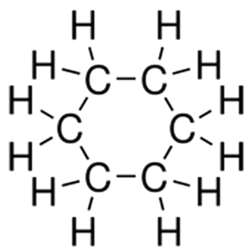
3-хексен



1-хексин

Например в съединението 3-хексен има двойна, а в 1-хексин — тройна връзка, поради което молекулните им формули са съответно C_6H_{12} и C_6H_{10} , а не C_6H_{14} .

Твърдението не е в сила за циклични въглеводороди — такива, които съдържат пръстен от въглеродни атоми.



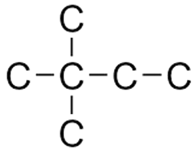
циклохексан

Например циклохексанът C_6H_{12} има 12, а не 14 водородни атома.

РЕШЕНИЯ

Задача 1.

а) Първо, удобно е да опростим структурните формули, като пропуснем водородните атоми (те се подразбират). Например формулата на химичното съединение 2,2-диметилбутан може да се запише по-просто така:



Можем да разглеждаме въглеродната верига на всеки наситен въглеводород като граф: въглеродните атоми и химичните връзки между тях са съответно върховете и ребрата на графа. Имаме тъкмо граф, а не мултиграф, защото в наситените въглеводороди няма кратни връзки. Графът е без примки, понеже никой атом не може да бъде свързан със себе си.

Графът е неориентиран, тъй като е все едно дали ще кажем за два свързани атома, че първият е свързан с втория, или ще кажем, че вторият е свързан с първия.

На ацикличен въглеводород съответства ацикличен граф.

В условието на задачата не е споменато изрично, но се подразбира, че графът е свързан. Иначе всяка компонента на свързаност би представлявала отделна молекула и бихме имали не едно химично съединение, а смес от няколко.

Нека n е броят на въглеродните атоми, т.е. броят на върховете на графа, а $d_1\,, d_2\,, \ldots, d_n$ са техните степени. Понеже в органичните съединения въглеродът е от четвърта валентност, то степените са цели неотрицателни числа, ненадхвърлящи 4. По-точно, i-тият въглероден атом е свързан с четири други атома, от които d_i са въглеродни, а останалите $4 - d_i$ са водородни. Следователно общият брой на водородните атоми в молекулата е сборът на числата $4 - d_i$.

След тези разсъждения можем да преформулираме задачата така:

Ацикличен свързан неориентиран граф (без примки) има n върха от степени $d_1\,, d_2\,, \ldots, d_n$, ненадхвърлящи 4. Да се докаже, че

$$\bigl(4 - d_1\bigr) + \bigl(4 - d_2\bigr) + \ldots + \bigl(4 - d_n\bigr) = 2n + 2.$$

б) Решаваме задачата в новата, математическа формулировка. За целта опростяваме сбора в лявата страна на равенството, докато получим израза в дясната страна.

Сборът на умаляемите (n на брой четворки) е равен на $4n$.

Сборът на умалителите $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2m$, където m е броят на ребрата на графа. Множителят 2 е поставен, тъй като всяко ребро е броено в сбора отляво два пъти — по веднъж за всеки от двата върха, които свързва.

Следователно лявата страна на доказваното равенство се опростява до израза $4n - 2m$.

По определение всеки ацикличен свързан неориентиран граф (без примки) е дърво. Както е известно, всяко дърво с n върха има точно $m = n - 1$ ребра. Следователно лявата страна може да бъде опростена по-нататък така:

$$4n - 2m = 4n - 2(n-1) = 4n - 2n + 2 = 2n + 2,$$

което е точно дясната страна. С това желаното равенство е доказано.

Забележка: В доказателството никъде не използвахме предположението, че степените на върховете не надхвърлят 4. Това предположение не е нужно за истинността на равенството

$$\bigl(4 - d_1\bigr) + \bigl(4 - d_2\bigr) + \ldots + \bigl(4 - d_n\bigr) = 2n + 2,$$

т.е. равенството е в сила за всяко дърво, даже ако някои върхове са от степен 5 или по-висока. В последния случай обаче на дървото не съответства никакъв алкан: не е възможно да има въглероден атом, свързан с отрицателен брой водородни атоми.

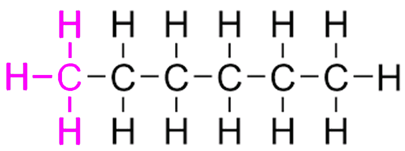
Задача 2. Предишната задача може да се реши и с математическа индукция.

База: $n = 1$. Тогава $2n + 2 = 4$. Действително, метанът CH_4 съдържа един въглероден и четири водородни атома.

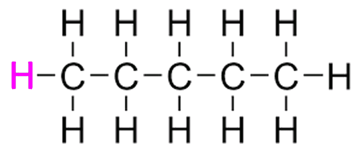
Индуктивна стъпка: Нека наситените ациклични въглеводороди с $n-1$ въглеродни атома съдържат $2(n-1)+2 = 2n$ водородни атома ($n \geq 2$). Въз основа на това ще докажем, че наситените ациклични въглеводороди с n въглеродни атома съдържат $2n+2$ водородни атома.

Да вземем произволен наситен ацикличен въглеводород с n въглеродни атома. Тъй като е ацикличен, то въглеродната верига има поне два края (може и повече, ако е разклонена). Избираме един от крайните въглеродни атоми; в химията те се наричат първични, понеже са свързани само с един друг въглероден атом. Избраният въглероден атом е свързан с един друг въглероден атом, следователно е свързан с три водородни атома. Да отделим цялата група CH_3 и да я заместим с един водороден атом (заместването е нужно, та отсрещният въглероден атом да остане от четвърта валентност).

П р и м е р : След извършване на описаното действие от нормален хексан се получава нормален пентан.



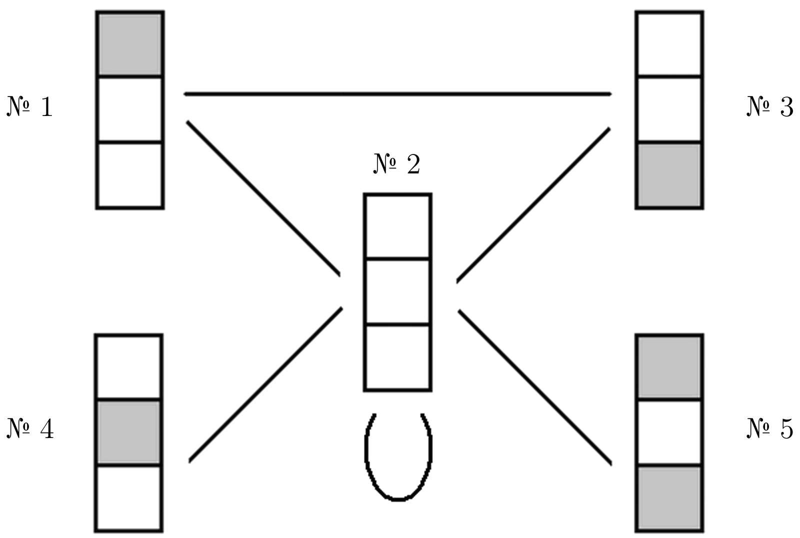
нормален хексан



нормален пентан

В общия случай въглеродната верига остава цяла, понеже отделената група е в края ѝ. Новото съединение пак е наситен ацикличен въглеводород, защото отделянето на атоми не може да създаде нито цикъл, нито кратни връзки (а може само да ги премахне). След заместването броят на въглеродните атоми е $n-1$, поради което е в сила индуктивното предположение: новото химично съединение има $2n$ водородни атома. Първоначалното съединение има два водородни атома повече — премахнатите три минус добавения един. С други думи, първоначалното съединение има $2n+2$ водородни атома, което трябваше да се докаже.

Задача 3. Има пет варианта за застрояване на стълб 3×1. Те са показани на чертежа.



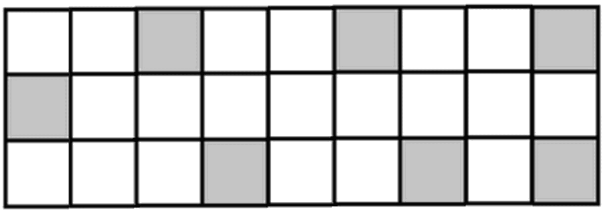
Ребрата на графа свързват съвместими варианти — такива, при чието долепване не се получават съседни застроени парцели. Примката под вариант № 2 показва, че той е съвместим със себе си.

Полученият неориентиран граф има следната матрица на свързаност:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Всяко застрояване на правоъгълния терен 3×9 представлява редица от девет стълба 3×1, като всеки два съседни стълба са съвместими. Между деветте стълба има осем прехода — от първия към втория, от втория към третия стълб и т.н. Преходите образуват маршрут в графа с дължина 8. (Дължината на маршрута е броят на ребрата; върховете са с един повече — девет.) Обратно, на всеки маршрут с дължина 8 съответства едно възможно застрояване. Маршрутът може да повтаря върхове и ребра; не е задължително да минава през всички върхове на графа.

П р и м е р : На маршрута $4 - 2 - 1 - 3 - 2 - 1 - 3 - 2 - 5$ съответства следното застрояване:



Тази биекция показва, че броят на възможните застроявания на правоъгълния терен 3×9 е равен на броя на маршрутите в графа с дължина 8. Този брой може да бъде намерен от матрицата A^8, която се пресмята най-лесно чрез трикратно повдигане на квадрат:

$$A^2 = A \,.\, A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^4 = A^2 \,.\, A^2 = \begin{pmatrix} 11 & 18 & 10 & 7 & 7 \\ 18 & 35 & 18 & 11 & 11 \\ 10 & 18 & 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 & 5 & 5 \\ 7 & 11 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A^8 = A^4 \,.\, A^4 = \begin{pmatrix} 643 & 1162 & 642 & 415 & 415 \\ 1162 & 2115 & 1162 & 747 & 747 \\ 642 & 1162 & 643 & 415 & 415 \\ 415 & 747 & 415 & 269 & 269 \\ 415 & 747 & 415 & 269 & 269 \end{pmatrix}.$$

Числото в i-тия ред и j-тия стълб на матрицата A^8 е броят на маршрутите с дължина 8 от връх № i до връх № j на графа. Броят на всички маршрути с дължина 8 се получава, като съберем елементите на матрицата A^8:

$$643 + 1162 + 642 + \ldots + 415 + 269 + 269 = 16717.$$

Това е и броят на всички възможни застроявания на терена.

Отговор: Има 16717 начина да бъде застроен правоъгълният терен 3×9.

Забележка: Пресмятането на степените на матрицата може да се облекчи значително от подходяща компютърна програма. Например Microsoft Excel предлага функция MMULT за умножаване на матрици.

Задача 4. Предишната задача може да бъде решена и с помощта на динамично програмиране. Дефинираме матрица $A = \left(a_{ij}\right)$ с пет реда и девет стълба: $a_{ij} =$ броя на начините, по които може да бъде застроен правоъгълен терен, разделен на $3j$ парцела — в три реда, по j на ред, — ако за последния (j-тия) стълб се използва i-тият вариант, $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 9$.

От тази дефиниция следва, че при $j = 1$ правоъгълникът $3 \times j$, т.е. 3×1, може да бъде застроен по пет различни начина: показаните на предишната страница. Затова в първия стълб на матрицата A пишем пет единици. Останалите стълбове попълваме по рекурентната формула:

$$a_{i\,j+1} \;=\; \sum_{\substack{k\,:\\ \text{№}\,k \text{ е съвместим с } \text{№}\,i}} a_{k\,j} \quad \text{за всяко цяло положително } j.$$

Тази формула е просто комбинаторното правило за събиране: за да намерим по колко начина може да бъде застроен терен с размери $3 \times (j+1)$, ако за последния, т.е. $(j+1)$-ия, стълб се използва i-тият вариант, събираме начините, по които може да се застрои терен $3 \times j$, ако за последния (j-тия) стълб се използва k-тият вариант, като сумираме само по тези k, които са съвместими с i.

В предишното решение намерихме съвместимите варианти (вж. графа с петте върха). Затова, като заместим i с числата от 1 до 5 включително, получаваме:

$$\begin{aligned}
a_{1\,j+1} &= a_{2\,j} + a_{3\,j}\;;\\
a_{2\,j+1} &= a_{1\,j} + a_{2\,j} + a_{3\,j} + a_{4\,j} + a_{5\,j}\;;\\
a_{3\,j+1} &= a_{1\,j} + a_{2\,j}\;;\\
a_{4\,j+1} &= a_{2\,j}\;;\\
a_{5\,j+1} &= a_{2\,j}\;.
\end{aligned}$$

По тези формули попълваме колонките на матрицата A последователно: втората, третата, четвъртата и т.н. до деветата включително. Получава се следната матрица:

$$A \;=\; \begin{pmatrix}
1 & 2 & 7 & 18 & 53 & 146 & 415 & 1162 & 3277\\
1 & 5 & 11 & 35 & 93 & 269 & 747 & 2115 & 5933\\
1 & 2 & 7 & 18 & 53 & 146 & 415 & 1162 & 3277\\
1 & 1 & 5 & 11 & 35 & 93 & 269 & 747 & 2115\\
1 & 1 & 5 & 11 & 35 & 93 & 269 & 747 & 2115
\end{pmatrix}.$$

Числата в последната колонка означават следното:
— Ако в последния, деветия стълб на правоъгълния терен 3×9 застроим само единия от ъглите (т.е. само горния десен или само долния десен ъгъл), то останалата част от терена можем да застроим по 3277 начина във всеки от тези два случая.
— Ако в последния стълб на правоъгълника застроим двата ъгъла или само средния парцел, то останалата част от терена можем да застроим по 2115 начина във всеки от двата случая.
— Ако оставим последния стълб незастроен, то за останалата част има 5933 възможности.
Остава да съберем тези числа, за да получим броя на всички начини за застрояване:

$$3277 + 5933 + 3277 + 2115 + 2115 \;=\; 16717.$$

Това число е отговорът на задачата.