Домашно № 4 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Информатика", I курс, летен семестър на 2021/2022 уч. г. в СУ, ФМИ

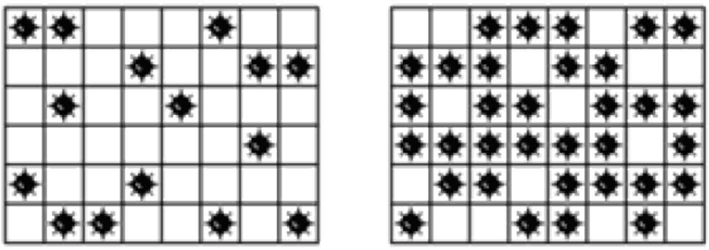
Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*20*	*45*	*18*	*17*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

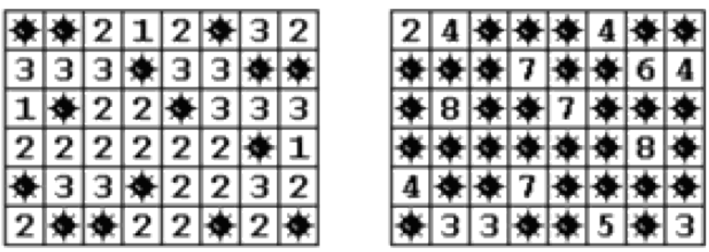
Задача 1. Игралното поле на Minesweeper се състои от клетки. В някои клетки има мини. Останалите клетки са свободни. Допълнението на игрално поле се получава, като поставим мини в свободните клетки и премахнем мините от клетките, които дотогава са били заети.



Игрално поле и неговото допълнение.

Във всяка празна клетка записваме цяло неотрицателно число — броя на съседните клетки, заети от мини. (В клетките с мини не пишем числа.) Съседни са тези клетки, които притежават общ ръб или общ връх. Например всяка клетка, която не е по контура на игралното поле, има осем съседни клетки.

Забележителен факт е, че всяко игрално поле и неговото допълнение имат еднакъв сбор от числата, записани в клетките. Например за показаното тук игрално поле този сбор е 75.



Игралното поле и допълнението му имат еднакъв сбор (75).

Още по-интересно е, че това свойство важи за всяка релация на съседство между клетките.

а) Разгледайте следната релация на съседство: две клетки са съседни само ако имат общ ръб. Така всяка клетка, която не е по контура на игралното поле, има четири съседни клетки. За разположението на мините от примера по-горе проверете, че равенството на сборовете важи и за тази релация на съседство. **(5 точки)**

б) С теорията на графите докажете равенството на сборовете. Доказателството трябва да важи за всяко игрално поле и <u>всяка</u> симетрична релация на съседство между клетките. **(15 точки)**

Задача 2. Върху сфера са прекарани n големи окръжности (такива, чийто център съвпада с центъра на сферата). Никои три от тях не минават през една точка. Тези n окръжности разделят сферата на области. Две области са съседни, ако контурите им имат обща дъга (с положителна дължина); не е достатъчно контурите им да имат една или две общи точки.

а) Пресметнете броя на областите. **(5 точки)**

б) Докажете, че областите могат да бъдат оцветени с два цвята (бял и черен) по такъв начин, че съседните области да са разноцветни. **(5 точки)**
Докажете, че има само две такива оцветявания и едното е негатив на другото. **(10 точки)**

в) За кои n белите области са четен брой? А черните? **(5 точки)**

г) Пътешественик иска да обиколи областите, като мине през всяка по веднъж, започвайки от произволно избрана област (без да се връща в нея накрая). Той може да минава през границите между областите, но не и през пресечните точки на дадените n големи окръжности.
Докажете, че ако n е кратно на 4 и $n > 0$, пътешествието е неосъществимо. **(10 точки)**

Подточка "г" и втората част на подточка "б" имат връзка с теореми от теорията на графите. Кои са тези теореми? **(10 точки)**

Задача 3. Намерете $\chi'(K_n)$ — хроматичния индекс на пълния неориентиран граф с n върха.

Задача 4. Нека $G(V, E)$ е краен неориентиран граф без примки и без изолирани върхове, $n = |V|$ е броят на върховете на G. За всеки връх $v \in V$ означаваме с $d(v)$ степента му, т.е. броя на ребрата, които излизат от него, и полагаме

$$k(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{\substack{u: \\ \{u, v\} \in E}} d(u), \qquad D = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v), \qquad K = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} k(v).$$

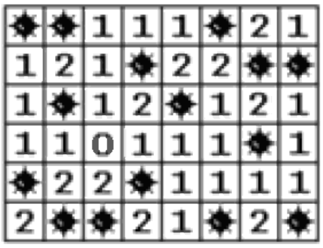
а) Докажете, че $D \leq K$. **(15 точки)**

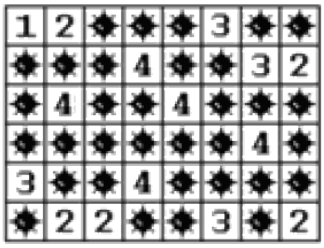
б) Предложете подходящо практическо тълкуване на това неравенство. **(2 точки)**

РЕШЕНИЯ

Задача 1.

а) За новата релация на съседство игралното поле и неговото допълнение се попълват с числа по начина, показан на картинката.





Сборът от числата е равен на 43 за всяко от двете игрални полета.

б) За да докажем желаното равенство в общия случай (когато игралното поле е произволно и релацията на съседство е произволна симетрична релация), дефинираме подходящ граф. Върховете на графа са клетките на игралното поле. Два върха на графа са свързани с ребро точно когато техните клетки са съседни и разнотипни (т.е. в едната има мина, а в другата няма). Графът е неориентиран и без примки, защото релацията, определяща ребрата му, е симетрична и антирефлексивна:

— Релацията "клетките x и y са съседни и разнотипни" е симетрична, защото такива са съставните ѝ части: релацията "съседни" е симетрична по условие, а релацията "разнотипни" е очевидно симетрична (ако x и y са разнотипни клетки, то в едната има мина, а в другата няма; същото важи за y и x, следователно y и x са разнотипни).

— Релацията, определяща ребрата на графа, е антирефлексивна, защото, каквато и да е релацията на съседство между клетките на игралното поле, никоя клетка не може да бъде разнотипна в сравнение със себе си (не може в една клетка хем да има мина, хем да няма).

Освен това, графът е двуделен, тъй като ребрата му свързват само разнотипни клетки: единият дял на графа е образуван от върховете, съответстващи на клетките, заети с мини; другият дял на графа е образуван от върховете, съответстващи на незаетите клетки.

Числото, записано в незаета клетка, показва броя на съседните клетки, заети с мини. Тоест това число е равно на броя на ребрата, излизащи от съответния връх на графа. Този брой се нарича степен на върха. Сборът от числата на игралното поле е всъщност сборът от степените на върховете на единия дял на графа — онзи дял, който съдържа върховете, съответстващи на клетките без мини.

Кое да е игрално поле и допълнението му имат изоморфни графи. По-точно, единият граф се получава от другия чрез разменяне на ролите на двата дяла. Равенството на сборовете от числа, записани в двете игрални полета, следва от известна теорема от теорията на графите:

Във всеки двуделен граф сборът от степените на върховете на единия дял
е равен на сбора от степените на върховете на другия дял;
всеки от двата сбора е равен на броя на ребрата на графа.

Предложеното решение на задачата важи за произволно игрално поле, както и за всяка симетрична релация на съседство между клетките.

Това интересно свойство на Minesweeper е публикувано за първи път през 2009 година от Antonio Jara del las Heras.

Задача 2.

а) Нека a_n е броят на областите, на които се разделя сферата от n големи окръжности, никои три от които не минават през една точка. Очевидно $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

Произволни две големи окръжности се пресичат в две противоположни точки на сферата (например меридианите на Земята се пресичат на Северния и на Южния полюс). Следователно n-тата окръжност пресича предишните $n-1$ окръжности в $2(n-1)$ точки, като по този начин създава $2(n-1)$ нови области. Затова

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \text{ за всяко цяло число } n \geq 2.$$

Уравнението и предхождащите го разсъждения не важат при $n = 1$: за първата окръжност няма предишни окръжности, които да бъдат пресечени от нея. Членовете с най-малки индекси, свързани от уравнението, са a_1 и a_2, а за a_0 и a_1 уравнението не се отнася: равенството $a_1 = a_0 + 2\,.\,0$, тоест $2 = 1$, не е вярно.

Ето защо, по какъвто и начин да решаваме полученото линейно-рекурентно уравнение — било чрез характеристично уравнение, било чрез развиване, — не бива да използваме a_0. При решаване на рекурентни уравнения винаги трябва да се отчита областта на валидност.

Тук ще решим уравнението чрез развиване:

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1) = a_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) = a_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1).$$

Като развием докрай, се получава следното:

$$a_n = a_1 + 2\,.\,1 + \ldots + 2(n-2) + 2(n-1).$$

Заместваме $a_1 = 2$ и формулата приема вида:

$$a_n = 2 + 2\Big(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1)\Big).$$

По известната формула за сумиране намираме

$$a_n = 2 + \cancel{2} \cdot \frac{(n-1)\,n}{\cancel{2}} = n^2 - n + 2.$$

Този резултат важи при $n \geq 1$, но не и при $n = 0$.

Отговор: $a_n = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 0; \\ n^2 - n + 2 \text{ при } n \geq 1. \end{cases}$

б) Че областите могат да бъдат оцветени с два цвята (бял и черен), се доказва с индукция по n. При $n = 0$ цялата сфера е в един цвят (например бяла). При $n = 1$ единствената окръжност разделя сферата на две половини; едната оцветяваме в бяло, другата — в черно.

Нека $n > 1$. Предполагаме, че вече са прекарани $n-1$ окръжности и че получените области са оцветени с два цвята. След прекарването на n-тата окръжност цветовете от едната ѝ страна се обръщат: белите области стават черни, а черните — бели. (Ако приемем, че n-тата окръжност е екваторът на Земята, обръщаме цветовете например на областите в Северното полукълбо.) Така отново се получава правилно оцветяване.

С това доказахме, че съществува поне едно правилно оцветяване. Ако обърнем цветовете на всички области едновременно, ще получим второ правилно оцветяване — негатива на първото.

Не съществуват други оцветявания освен тези двете. Това се доказва с помощта на графи. На всяко разделяне на сферата на области съпоставяме граф: върховете на графа съответстват на областите на сферата, а между два върха на графа има ребро, когато съответните им области са съседни. Оцветяването на областите на сферата поражда оцветяване на върховете на графа, като ребрата свързват само разноцветни върхове. С други думи, графът е двуделен. Обратно, всяко оцветяване на върховете на графа поражда съответно оцветяване на областите на сферата. Твърдението за оцветяване на сферата се свежда до следното твърдение за оцветяване на графи:

Всеки свързан двуделен граф притежава
само две оцветявания на върховете в два цвята
и едното от тях е негатив на другото.

Графът има поне едно (правилно) оцветяване по определение — защото е двуделен. Съществува и второ оцветяване — негативът на първото. Дотук използвахме само, че графът е двуделен.

За да докажем, че освен тези две оцветявания няма други, ще ни потрябва свързаността на графа. Нека u е произволен и фиксиран връх на графа. Оцветяваме u по произволен начин. Нека v е някой друг връх. Понеже графът е свързан, то съществува път от u до v. Ако дължината му е четна, оцветяваме v в същия цвят като u. Ако дължината на пътя е нечетна, оцветяваме v в противоположния цвят. (Нямаме друга възможност, понеже в двуделен граф върховете от всеки път редуват цветовете: бял, черен, бял, черен и т.н.)

И така, ако изберем цвета на u, то цветовете на другите върхове са еднозначно определени. Следователно графът има не повече оцветявания, отколкото са възможностите за цвета на u, т.е. две възможности.

В това доказателство съществено се използва фактът, че графът е свързан. Ако не е така, има 2^k оцветявания на върховете на графа, където k е броят на компонентите на свързаност. Този резултат се получава от правилото за умножение: има по две възможни оцветявания за всяка компонента.

Следователно, за да докажем, че има само две оцветявания на областите на сферата, трябва да установим, че съответният граф е свързан. Да допуснем противното: че графът не е свързан, тоест съществуват два върха, между които няма път, образуван от ребрата на графа. Значи, между съответните им области няма път върху сферата. Тъй като пътешественикът може да преминава от една област в друга, като пресича границите на областите, то границите не са важни (не пречат на пътешественика) и ние можем да ги пренебрегнем. Забранени за пътешественика са само пресечните точки на големите окръжности. Забранените точки са краен брой, ето защо останалата част от сферата е свързана фигура, тоест не е възможно да има две разрешени точки, между които да липсва път.

Полученото противоречие показва, че допускането за несвързаност на графа не е вярно. Следователно графът е свързан и освен двете оцветявания други няма.

в) При $n = 0$ областите от единия цвят са нечетен брой (1), а от другия цвят — четен брой (0). Оттук нататък нека $n > 0$.

Тъй като всяка голяма окръжност е симетрична относно центъра на сферата, такава е и цялата фигура, образувана от начертаните n големи окръжности (стига да се абстрахираме от цветовете на областите).

Отначало, когато още не е прекарана окръжност, диаметрално противоположните точки са едноцветни. След прекарването на първата голяма окръжност те стават разноцветни, след прекарването на втората — пак едноцветни и т.н. Тоест в сила е следното твърдение: диаметрално противоположните точки (нележащи на никоя от дадените n големи окръжности) са едноцветни при четно n и разноцветни при нечетно n.

Дотук не използвахме, че $n > 0$, тоест тези изводи важат и при $n = 0$.

Сега нека n е четно и $n > 0$. Щом n е четно, то диаметрално противоположните области са едноцветни, а щом $n > 0$, те са различни области, тъй като поне една окръжност ги дели една от друга. Следователно областите се групират по двойки; всяка двойка е образувана от диаметрално противоположни области. Понеже областите във всяка двойка са едноцветни, то от всеки цвят има четен брой области.

Нека n е нечетно (положително) число, тоест $n = 2k - 1$ за някое цяло положително k. Пак групираме диаметрално противоположните области в двойки, ала сега те са разноцветни. Следователно броят на белите области е равен на броя на черните области, като двете стойности са равни на половината от общия брой области, тоест на

$$\frac{n^2 - n + 2}{2} = \frac{(2k-1)^2 - (2k-1) + 2}{2} = \frac{4k^2 - 6k + 4}{2} = 2k^2 - 3k + 2 \equiv k = \frac{n+1}{2} \pmod{2}.$$

И така, когато n е нечетно число, броят на белите области и броят на черните области имат една и съща четност, която съвпада с четността на числото $\dfrac{n+1}{2}$:

— тези числа са четни, когато n дава остатък 3 при деление на 4;

— тези числа са нечетни, когато n дава остатък 1 при деление на 4.

г) В подточка “б” съпоставихме неориентиран граф на всяко разделяне на сферата от n големи окръжности. Върховете на графа съответстват на областите на сферата, а ребрата на графа свързват върхове, съответстващи на съседни области. Пак там доказахме, че графът е свързан и двуделен.

Желаното пътешествие върху сферата би имало съответен път върху графа. Такъв път би посещавал всички върхове на графа по веднъж, тоест би бил хамилтонов път. С други думи, в задачата се търси доказателство, че не съществува хамилтонов път в графа, съответстващ на разделянето на сферата.

В двуделен граф по определение няма ребра между едноцветни върхове. Следователно пътищата в двуделен граф редуват цветовете на върховете. Затова важи следното твърдение:

За да има хамилтонов път в двуделен граф, е необходимо (но не е достатъчно!)
броят на върховете в единия дял да е равен на броя на върховете в другия дял
или бройките на върховете в двата дяла на графа да се различават с единица.
В последния случай двата края на хамилтоновия път са от по-големия дял.

Изискването е необходимо, но не е достатъчно. Необходимо е още графът да е свързан. Конюнкцията на двете изисквания също не дава достатъчно условие за съществуване на хамилтонов път.

Ще използваме цитираното необходимо условие, за да установим, че нашият граф не съдържа хамилтонов път, когато n се дели на 4 (и е положително).

Действително, щом n се дели на 4, то n е четно. От доказаното в подточка “в” следва, че графът има четен брой бели и четен брой черни върхове. Следователно разликата на броя на върховете на двата дяла е четно число и не може да бъде единица. Така отпада едната от възможностите, предвидени в необходимото условие. Остава другата възможност: двата дяла да имат равен (и четен) брой върхове. Нека този брой е 2s, където s е някакво цяло число. В такъв случай графът има общо $2s + 2s = 4s$ върха, тоест броят на всички върхове на графа се дели на 4.

От друга страна, върховете на графа съответстват на областите на сферата, чийто брой $n^2 - n + 2$ пресметнахме в подточка “а”. Понеже n се дели на 4, то $n = 4p$ за някое цяло p, а броят на върховете $n^2 - n + 2 = (4p)^2 - 4p + 2 = 16p^2 - 4p + 2 = 4\big(4p^2 - p\big) + 2$ дава остатък 2 при деление на 4.

Полученото противоречие (че броят на върховете хем се дели на 4, хем дава остатък 2 при това деление) показва, че не може двата дяла на графа да съдържат равен брой върхове. Тоест необходимото условие не е изпълнено. Следователно графът не съдържа хамилтонов път.

Има просто необходимо условие за съществуването на хамилтонов *цикъл* в двуделен граф. Тъй като цикълът редува цветовете и трябва да се върне във върха, от който е тръгнал, то цикълът трябва да съдържа равен брой бели и черни върхове. Оттук следва още и това, че броят на всички върхове на графа трябва да бъде четно число.

За да има хамилтонов цикъл в двуделен граф, е необходимо (но не е достатъчно!)
броят на върховете в единия дял да е равен на броя на върховете в другия дял.
В частност е необходимо (но не е достатъчно!) графът да има четен брой върхове.

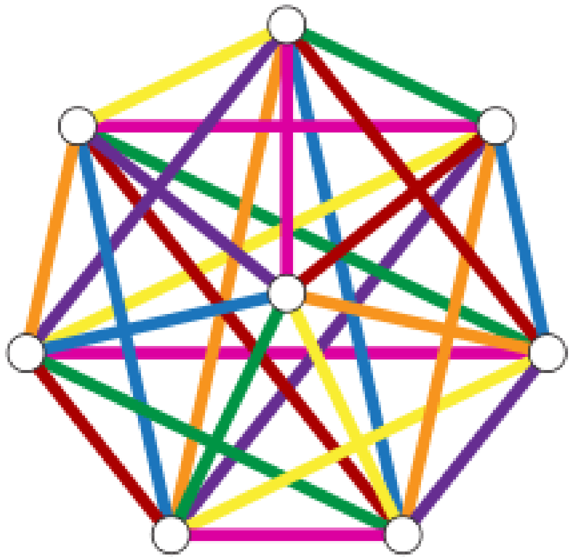
Необходимо е още графът да е свързан, но дори да добавим това изискване към другите, пак няма да получим достатъчно условие за съществуване на хамилтонов цикъл.

Очевидно двете необходими условия важат само за двуделни графи. В противен случай условията губят смисъл.

Автор на задачата за пътешественика (задача 2г) е Leo Moser.

Задача 3 се решава с разглеждане на случаи.

Първи случай: Броят на върховете n е четно число. Ще докажем, че $\chi'(K_n) = n-1$. Едно възможно оцветяване на ребрата на K_n с $n-1$ цвята се получава по следния начин. Върховете на един правилен $(n-1)$-ъгълник и центърът му — общо n точки — са върховете на графа. Ребрата му оцветяваме, както следва: всеки от разполагаемите $n-1$ цвята даваме на точно един от радиусите, които свързват центъра с върховете на $(n-1)$-ъгълника, и на диагоналите, които са перпендикулярни на споменатия радиус. Тези диагонали са успоредни помежду си, така че един с друг нямат общи върхове, а също нямат общ връх и с радиуса, на който са перпендикулярни. Следователно се получава правилно оцветяване с $n-1$ цвята на ребрата на пълния граф K_n. Оцветяване при $n = 8$ е показано на чертежа.



Доказахме, че $n-1$ цвята са достатъчни. Сега ще докажем, че по-малко цветове не стигат. Едноцветни ребра не могат да имат общ връх, затова от кой да е цвят може да има най-много $\dfrac{n}{2}$ ребра. Всички ребра са $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Следователно най-малко $\dfrac{n(n-1)}{2} : \dfrac{n}{2} = n-1$ цвята са нужни за оцветяването на ребрата на графа K_n.

И така, $n-1$ цвята са достатъчни, а по-малко не стигат за оцветяване на ребрата на K_n. Тоест $n-1$ е най-малкият възможен брой цветове. Ето защо $\chi'(K_n) = n-1$.

Втори случай: Броят на върховете n е нечетно число. Ще докажем, че $\chi'(K_n) = n$. Едно оцветяване на ребрата на K_n с n цвята се получава по следния начин. Щом n е нечетно, то $n+1$ е четно. Затова към графа K_{n+1} са приложими разсъжденията от първия случай. За неговите ребра, както установихме, са достатъчни $(n+1)-1 = n$ цвята. След изтриване на произволно избран връх на K_{n+1} и ребрата, излизащи от този връх, остава граф K_n, правилно оцветен с n цвята.

Доказахме, че n цвята са достатъчни. Сега ще докажем, че по-малко цветове не стигат. Едноцветни ребра не могат да имат общ връх, затова от всеки цвят има най-много $\dfrac{n}{2}$ ребра. Но n е нечетно, затова $\dfrac{n}{2}$ е полуцяло и броят на ребрата от всеки цвят не надхвърля $\dfrac{n-1}{2}$. Тъй като броят на всички ребра е $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, то най-малко $\dfrac{n(n-1)}{2} : \dfrac{n-1}{2} = n$ цвята са нужни за оцветяването на K_n.

И така, n цвята са достатъчни, а по-малко не стигат за оцветяване на ребрата на K_n. Тоест n е най-малкият възможен брой цветове. Ето защо $\chi'(K_n) = n$.

Отговор: $\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1, & \text{ако } n \text{ е четно;} \\ n, & \text{ако } n \text{ е нечетно.} \end{cases}$

Забележка: Разсъжденията по-горе и отговорът важат при всяко цяло число $n \geq 2$, обаче за $n = 1$ и $n = 0$ не са в сила (получава се деление на 0). Но тези два случая са тривиални: тогава графът няма ребра и отговорът е 0.

Задача 4. Преработваме сумата

$$\sum_{v\,\in\,V} k(v) \;=\; \sum_{v\,\in\,V} \left(\frac{1}{d(v)} \sum_{\substack{u:\\ \{u\,,\,v\}\,\in\,E}} d(u) \right) \;=\; \sum_{v\,\in\,V} \sum_{\substack{u:\\ \{u\,,\,v\}\,\in\,E}} \frac{d(u)}{d(v)} \;=\; \sum_{\{u\,,\,v\}\,\in\,E} \left(\frac{d(u)}{d(v)} + \frac{d(v)}{d(u)} \right) \;\geq\; \sum_{\{u\,,\,v\}\,\in\,E} 2 \;=\; 2m,$$

където m е броят на ребрата на графа. Първото равенство следва от определението на $k(v)$. Второто равенство се получава, като внесем делителя $d(v)$ във вътрешната сума, а третото следва от факта, че в получената двойна сума всяко ребро се среща два пъти, тъй като всеки от върховете му приема веднъж ролята на u и веднъж ролята на v. Последното равенство е вярно, защото лявата му страна е сбор на m двойки — колкото са ребрата на графа.

Неравенството в горната верига от преобразувания е следствие на известното неравенство

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \;\geq\; 2,$$

приложено за $x = d(u)$, $y = d(v)$. То важи за всички положителни x и y и се доказва лесно: умножаваме по xy, прехвърляме всички събираеми в лявата страна, при което се получава еквивалентното неравенство $(x-y)^2 \;\geq\; 0$.

И така, дотук доказахме, че

$$\sum_{v\,\in\,V} k(v) \;\geq\; 2m.$$

От друга страна, добре известно е, че

$$\sum_{v\,\in\,V} d(v) \;=\; 2m.$$

В лявата страна се събира броят на ребрата, излизащи от всеки връх. Така всяко ребро се брои два пъти — по веднъж за всеки от краищата си. Затова сборът е равен на удвоения брой ребра.

Следователно

$$\sum_{v\,\in\,V} d(v) \;\leq\; \sum_{v\,\in\,V} k(v).$$

След деление на n се получава неравенството, чието доказателство се иска: $D \leq K$.

Това неравенство е известно под името "парадокс на приятелството". Ако върховете на графа представляват хора, а ребрата — приятелски връзки, то неравенството $D \leq K$ означава, че човек, средно взето, има не повече приятели, отколкото средно имат приятелите му. Самò по себе си това не е парадокс. Противоречие се получава с мнението на повечето хора, че са по-общителни от приятелите си. Ако се доверим на самооценката на мнозинството, ще излезе, че $D > K$.

Естествено, неравенството $D \leq K$ важи не само за приятелството, а за всяка симетрична (и антирефлексивна) релация. Например средностатистически писател има не повече съавтори, отколкото средно имат съавторите му. Типично търговско предприятие има не повече партньори, отколкото средно имат партньорите му. И така нататък.

СХЕМА ЗА ТОЧКУВАНЕ

Задача 1. Общо 20 точки, в това число:
а) 5 точки, от които:
— за попълване на игралното поле с числа: 3 точки;
— за проверка на равенството на сборовете: 2 точки;
б) 15 точки, от които по 5 точки за всяка от следните стъпки:
— дефиниране на подходящ граф;
— установяване, че графът е двуделен;
— позоваване на теоремата за еднаквите сборове
от степените на върховете от двата дяла.

Задача 2. Общо 45 точки, разпределени, както е указано в условията.
Десетте точки в края на задачата: 5 т. към подусловие "б"и 5 т. към подусловие "г".
Тези точки се дават, ако решението е формулирано на езика на теорията на графите
или ако то (формулирано по друг начин) е придружено от съответните теореми за графи.

Задача 3. Общо 18 точки — по 9 точки за всеки от двата случая, в това число:
— за привеждане на пример за оцветяване на ребрата на графа
с минималния възможен брой цветове: 4 точки;
— за доказване, че този брой е минимален: 5 точки.

Задача 4. Общо 17 точки, в това число:
— за достигане до сбора от реципрочни дроби: 5 точки;
— за оценката, че 2 е долна граница на всяко събираемо: 5 точки;
— за неравенството $\sum\limits_{v \in V} k(v) \geq 2m$ се дават 2 точки;
— за позоваване на теоремата за сбора от степените на върховете: 2 точки;
— за доказване, че $D \leq K$, се дава 1 точка;
— за подходящо практическо тълкуване на това неравенство: 2 точки.