С Л О Ж Н О С Т Н А А Л Г О Р И Т М И Ч Н И З А Д А Ч И
КОНТРОЛНО № 5 ПО ДИЗАЙН И АНАЛИЗ НА АЛГОРИТМИ
ЗА СПЕЦИАЛНОСТ "КОМПЮТЪРНИ НАУКИ" — СУ, ФМИ, 2. КУРС, 1. ПОТОК
(2 ЮНИ 2022 Г.)

В А Р И А Н Т № 1

Масивът $B[1\ ...\ 2n]$ от реални числа е симетричен, ако $B[k] = B[2n + 1 - k]$ за всяко k от 1 до n. Докажете, че сортирането на симетричен масив $B[1\ ...\ 2n]$ чрез сравнения изисква време $\Omega(n \log n)$. За целта използвайте редукция. Опишете я на псевдокод, докажете коректността ѝ и анализирайте бързината ѝ.

Решение: Общият случай се свежда до частния така:

```
Сортиране(A[1...n]: произволен масив от реални числа)
1) B[1...2n]: симетричен масив от реални числа
2) for k ← 1 to n do
3)     B[k] ← A[k]
4)     B[2n+1-k] ← A[k]                                  (10 точки)
5) Сортиране_на_симетричен_масив(B[1...2n])
6) for k ← 1 to n do
7)     A[k] ← B[2k]
```

Коректност на редукцията:

— Първо, алгоритъмът на ред № 5 се извиква с допустими входни данни, тоест масивът $B[1\ ...\ 2n]$ е симетричен, защото се състои от реални числа (взети от A) и $B[k] = B[2n + 1 - k] = A[k]$ за всяко k според редове № 3 и № 4.

— Второ, в края на алгоритъма масивът $A[1\ ...\ n]$ се оказва сортиран. Наистина, редове № 2, № 3 и № 4 записват всеки елемент на A по два пъти в B. После ред № 5 сортира масива B и равните числа застават едно до друго. Всяка стойност участва четен брой пъти (заради редове № 2, № 3 и № 4), затова $B[1] = B[2]$, $B[3] = B[4]$ и т.н. Редове № 6 и № 7 копират в A само единия от всяка двойка поредни елементи на B (от $B[1]$ и $B[2]$, от $B[3]$ и $B[4]$ и т.н.), честотите намаляват наполовина, тоест връщат се към началните си стойности, и изходният масив A е пермутация на входния. Редове № 6 и № 7 запазват наредбата на елементите, тоест изходният масив A е подредица на масива B. Тъй като след изпълнението на ред № 5 от псевдокода масивът B е сортиран, то и изходният масив A, като подредица на B, също е сортиран. **(10 точки)**

Бързина на редукцията: Всеки от двата цикъла се изпълнява за време $\Theta(n)$, затова общото време на редукцията при всякакви входни данни е равно на $\Theta(n) = o(n \log n)$, тоест редукцията е достатъчно бърза. **(10 точки)**

С Л О Ж Н О С Т   Н А   А Л Г О Р И Т М И Ч Н И   З А Д А Ч И
КОНТРОЛНО № 5 ПО ДИЗАЙН И АНАЛИЗ НА АЛГОРИТМИ
ЗА СПЕЦИАЛНОСТ “КОМПЮТЪРНИ НАУКИ” — СУ, ФМИ, 2. КУРС, 1. ПОТОК
(2 ЮНИ 2022 Г.)

В А Р И А Н Т   №   2

Масива $B[1\,...\,2n]$ от реални числа наричаме специален, ако $B[2k-1] > B[2k]$ за всяко k от 1 до n. Докажете, че сортирането на специален масив $B[1\,...\,2n]$ чрез сравнения изисква време $\Omega(n \log n)$. За тази цел използвайте редукция. Опишете я на псевдокод, докажете коректността ѝ и анализирайте бързината ѝ.

Решение: Общият случай се свежда до частния така:

```
Сортиране(A[1...n]: масив от отрицателни реални числа)
1) B[1...2n]: специален масив от реални числа
2) for k ← 1 to n do
3)     B[2k] ← A[k]
4)     B[2k-1] ← 1                                   (10 точки)
5) Сортиране_на_специален_масив(B[1...2n])
6) for k ← 1 to n do
7)     A[k] ← B[k]
```

Коректност на редукцията:

— Първо, алгоритъмът на ред № 5 се извиква с допустими входни данни, тоест масивът $B[1\,...\,2n]$ е специален, защото $B[2k] = A[k] < 0 < 1 = B[2k-1]$ за всяко k, като двете равенства следват от редове № 3 и № 4 на псевдокода.

— Второ, в края на алгоритъма масивът $A[1\,...\,n]$ се оказва сортиран. Наистина, редове № 2, № 3 и № 4 записват в B всеки елемент на A по веднъж и добавят n единици. После ред № 5 сортира масива B и единиците отиват във втората половина на B, а отрицателните числа (елементите на масива A) запълват първата половина на B, тоест $B[1\,...\,n]$. Редове № 6 и № 7 копират в A първата половина на B. Така изходният масив A се състои от същите числа, но подредени в нарастващ ред, тоест този масив е сортиран. **(10 точки)**

Бързина на редукцията: Всеки от двата цикъла се изпълнява за време $\Theta(n)$, затова общото време на редукцията при всякакви входни данни е равно на $\Theta(n) = o(n \log n)$, тоест редукцията е достатъчно бърза. **(10 точки)**