Име: .... ФN°: .... Група: ....

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
от максимално	20	20	20	20	20	20	120

Всички Ваши отговори трябва да бъдат добре обосновани.

Задача 1. Нека A е крайно непразно множество и $|A| = n$. Нека $R \subseteq A \times A$. За всяко естествено число k дефинираме релацията Q_k така:

$$Q_k = \begin{cases} \{(x,x) \mid x \in A\}, & \text{ако } k = 0, \\ \{(x,y) \in A \times A \mid \exists z \in A((x,z) \in R^{k-1} \land (z,y) \in R)\}, & \text{ако } k > 0. \end{cases}$$

Докажете, че $Q_0 \cup Q_1$ е рефлексивното затваряне на R.

Задача 2. Нека $\Sigma = \{0,1\}$. Нека $S = \{x \in \Sigma^* \mid x \text{ има еднакъв брой нули и единици}\}$. Предложете индуктивна дефиниция на множеството S и докажете прецизно, че двете дефиниции са еквивалентни.

Задача 3. Докажете, че за всяко дърво $G = (V,E)$ е вярно, че $|V| = |E| + 1$. В тази задача **не е разрешено** да използвате наготово факта, доказан на лекции, че индуктивната дефиниция на “дърво” и не-индуктивната дефиниция са еквивалентни.

1 т. Първо, напишете не-индуктивната дефиниция на “дърво”.

19 т. Второ,

- или напишете индуктивната дефиниция на “дърво”, докажете прецизно еквивалентността на двете дефинции и после докажете желаното твърдение със структурна индукция,
- или, без да давате индуктивната дефиниция на “дърво”, докажете желаното твърдение директно от не-индуктивната дефиниция, използвайки силна индукция по броя на върховете.

Упътване за доказателство със силна индукция, ползвайки не-индуктивната дефиниция: разгледайте поотделно случаите $|V| = 1$ и $|V| > 1$. Ако $|V| > 1$, изтрийте произволен връх на дървото и разсъждавайте за получените свързани компоненти.