Съждително смятане

На англ. Propositional calculus

Съждителното смятане наподобява аритметичното смятане. Вместо аритметичните операции $+, -, \cdot, /$, имаме съждителни операции като $\neg, \wedge, \vee$. Освен това, докато аритметичните променливи приемат стойности произволни числа, то съждителните променливи приемат само стойности **истина (1)** или **лъжа (0)**.

Съждителен израз наричаме съвкупността от съждения $p, q, r, \ldots$, свързани със знаците за логически операции $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ и скоби, определящи реда на операциите.

Съждително верен (валиден) е този логически израз, който има вярностна стойност **1** при всички възможни набори на стойностите на съждителните променливи в израза.

Основни съждителни операции: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Ще използваме таблица за истинност за да определим стойностите на основните съждителни операции при всички възможни набори на стойностите на променливите.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1

Основни съждителни закони (правила)

I) **Комутативен закон**

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

II) **Асоциативен закон**

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

III) **Дистрибутивен закон**

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

IV) **Закони на де Морган**

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

V) **Закон за контрапозицията**

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

VI) **Обобщен закон за контрапозицията**

$$(p \ \wedge \ q) \rightarrow r \equiv (p \ \wedge \ \neg r) \rightarrow \neg q$$

VII) **Закон за изключеното трето**

$$p \vee \neg p \equiv \mathbf{1}$$

VIII) **Закон за силогизма (транзитивност)**

$$[(p \rightarrow q) \ \wedge \ (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r) \equiv \mathbf{1}$$

Лесно се проверява с таблиците за истинност, че законите са валидни.

Пример 1. Нека например да проверим едно от правилата на де Морган и закона за контрапозицията.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	1

При всички стойности на променливите p и q, стълбовете съответсващи на $\neg(p \wedge q)$ и $\neg p \vee \neg q$ съвпадат. Следователно, законът на де Морган е валиден. По същия начин се съобразява, че законът за констрапозицията е валиден.

Пример 2. Можем да докажем валидността на законите и по друг начин, а именно чрез допускане на противното. Така ще докажем, че законът за силогизма е валиден.

Да допуснем, че съществува стойност на променливите p,q,r, за които

$$\underbrace{[(p \rightarrow q) \ \wedge \ (q \rightarrow r)]}_{\mathbf{1}} \rightarrow \underbrace{(p \rightarrow r)}_{\mathbf{0}} \equiv \mathbf{0}$$

Това означава, че

$$p \equiv \mathbf{1}, r \equiv \mathbf{0}.$$

Тогава

$$\underbrace{[(\mathbf{1} \rightarrow q) \ \wedge \ (q \rightarrow \mathbf{0})]}_{\mathbf{1}} \rightarrow \underbrace{(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0})}_{\mathbf{0}} \equiv \mathbf{0}$$

- Ако $q \equiv \mathbf{0}$, то $(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0}) \ \wedge \ (\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0} \wedge \mathbf{1} \equiv \mathbf{0}$, следователно този случай е невъзможен.
- Ако $q \equiv \mathbf{1}$, то $(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1}) \ \wedge \ (\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0}) \equiv \mathbf{1} \wedge \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$, следователно този случай също е невъзможен.

И в двата случая за q достигнахме до противоречие. Следователно нашето допускане не е вярно, което означава, че при всяка стойност на променливите p, q, r,

$$[(p \rightarrow q) \ \wedge \ (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r) \equiv \mathbf{1}.$$

Задача 1. Проверете дали следните съждителни формули са тавтологии:

а) $(p \wedge q) \to p$;

б) $p \to (p \vee q)$;

в) $(p \to q) \ \leftrightarrow \ (\neg q \to \neg p)$;

г) $p \to q \equiv \neg p \vee q$

д) $(p \ \wedge \ q) \to r \equiv p \to (q \to r)$

е) $p \ \wedge \ q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$

ж) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \ \wedge \ (q \to p)$

з) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$;

и) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$;

к) $\neg(p \to q) \equiv (p \wedge \neg q)$;

Забележка 1. Обърнете внимание, че $(p \to q) \to r$ **не** е еквивалентно на $p \to (q \to r)$. Например вземете $p \equiv q \equiv r \equiv \mathbf{0}$.

Забележка 2. За удобство, понякога ще пишем $\overline{p}$ вместо $\neg p$ и pq вместо $p \wedge q$.

Задача 2. Да предположим, че сме на остров, който се обитава негодници и благородници. Негодниците винаги лъжат, а благородниците винаги казват истината. Срещаме трима обитатели на този остров, наречени **А**, **Б** и **В**.

а) **А** казва "Всички сме негодници". $a \leftrightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c}$

Б казва "Точно един от нас е благородник". $b \leftrightarrow (\overline{a}\overline{b}c \vee \overline{a}b\overline{c} \vee a\overline{b}\overline{c})$

Какви са **А**,**Б** и **В**?

б) **А** казва "Всички сме негодници". $a \leftrightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c}$

Б казва "Точно един от нас е негодник". $b \leftrightarrow (\overline{a}bc \vee ab\overline{c} \vee a\overline{b}c)$

Може ли да определим какъв е **Б**?

Може ли да определим какъв е **В**?

в) **А** казва "**Б** е негодник". $a \leftrightarrow \overline{b}$

Б казва "**А** и **В** са от един и същ тип, т.е. или и двамата са благородници, или и двамата са негодници". $b \leftrightarrow (ac \vee \overline{ac})$

Какъв е **В**?

Док.

а) Нека съждителната променлива a да има стойност **1**, ако **А** е благородник и нека има стойност **0**, ако **А** е негодник. Тогава

А) Ако **А** е благородник, то **А**,**Б**,**В** са негодници се превежда на езика на съждителното смятане като

$$a \to \overline{a}\overline{b}\overline{c}.$$

Ако **A** е негодник, то той лъже, следователно не е вярно, че всички са негодници. Това се превежда на езика на съждителното смятане като

$$\overline{a} \to \overline{\overline{a}\overline{b}\overline{c}},$$

което е еквивалентно на

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} \to a.$$

Следователно, в двата случая за **A** получаваме

$$(a \to \overline{a}\overline{b}\overline{c}) \wedge (\overline{a}\overline{b}\overline{c} \to a) \equiv \mathbf{1},$$

или

$$a \;\leftrightarrow\; \overline{a}\overline{b}\overline{c} \equiv \mathbf{1}.$$

Сега получаваме следните еквивалентни преобразования:

$$\begin{aligned}
a \;\leftrightarrow\; \overline{a}\overline{b}\overline{c} &\equiv\; (a \to \overline{a}\overline{b}\overline{c}) \;\wedge\; (\overline{a} \to (a \vee b \vee c)) \\
&\equiv\; (\overline{a} \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}) \wedge (a \vee a \vee b \vee c) \\
&\equiv\; \overline{a} \;\wedge\; (a \vee b \vee c) \\
&\equiv\; \overline{a}a \vee \overline{a}b \vee \overline{a}c \\
&\equiv\; \overline{a}b \vee \overline{a}c \\
&\equiv\; \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Б)

$$\begin{aligned}
b \;\leftrightarrow\; (\overline{a}\overline{b}c \vee \overline{a}b\overline{c} \vee a\overline{b}\overline{c}) &\equiv\; (b \to (\overline{a}\overline{b}c \vee \overline{a}b\overline{c} \vee a\overline{b}\overline{c})) \wedge (\overline{b} \to \overline{\overline{a}\overline{b}c \vee \overline{a}b\overline{c} \vee a\overline{b}\overline{c}}) \\
&\equiv\; (\overline{b} \vee \overline{a}\overline{b}c \vee \overline{a}b\overline{c} \vee a\overline{b}\overline{c}) \wedge (b \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee abc \vee \overline{a}bc \vee a\overline{b}c \vee ab\overline{c}) \\
&\equiv\; (\overline{b} \vee \overline{a}b\overline{c}) \wedge (b \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee a\overline{b}c) \\
&\equiv\; \overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee a\overline{b}c \vee \overline{a}b\overline{c}. \\
&\equiv\; \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

В) Сега взимаме конюнкцията на A) и Б).

$$(\overline{a}b \vee \overline{a}c) \wedge (\overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee a\overline{b}c \vee \overline{a}b\overline{c}) \;\equiv\; \overline{a}b\overline{c}.$$

$\square$