Множество е съвкупност от обекти (елементи). Едно множество може също така да бъде елемент на някое друго множество. Използваме означението $x \in A$, че обектът x принадлежи на множеството A.

Празното множество означаваме с $\emptyset$. То има следното свойство:

$$(\forall x)[x \notin \emptyset]$$

или еквивалентно,

$$\neg(\exists x)[x \in \emptyset].$$

Пример 3. Ето няколко примера за множества, които ще използваме често:

$$\begin{aligned}\mathbb{N} =& \{0, 1, 2, \dots\},\\ \mathbb{Z} =& \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},\\ \mathbb{Q} =& \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \;\&\; n \neq 0\}.\end{aligned}$$

Сравняване на множества

Казваме, че едно множество A **се включва в** множеството B, което означаваме с $A \subseteq B$, ако всеки елемент, който принадлежи на A, принадлежи и на B, т.е.

$$(\forall x)[x \in A \;\rightarrow\; x \in B].$$

Обикновено ще казваме, че A е **подмножество** на B. Ето няколко примера:

- $\emptyset \subseteq A$, за всяко множество A.
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.
- $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$.
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Две множества A и B са **равни**,

$$A = B \;\leftrightarrow\; A \subseteq B \;\&\; B \subseteq A.$$

Операции върху множества

Определяме следните операции върху произволни множества A и B.

(I) Сечение

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \;\&\; x \in B\}.$$

Казано малко по-формално, $A \cap B$ е множеството, за което е изпълнена формулата

$$(\forall x)[x \in A \cap B \;\leftrightarrow\; (x \in A \;\wedge\; x \in B)].$$

Примери:

- $A \cap \emptyset = \emptyset$, за всяко множество A.
- $\{1, 2, \emptyset\} \cap \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$.

- $\{1, 2, \{1, 2\}\} \cap \{1, \{1\}\} = \{1\}$.

(II) Обединение

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

$$(\forall x)[x \in A \cup B \ \leftrightarrow \ (x \in A \ \vee \ x \in B)].$$

$A \cup B$ е множеството, за което е изпълнена формулата Примери:

- $A \cup \emptyset = A$, за всяко множество A.
- $\{1, 2, \emptyset\} \cup \{1, 2, \{\emptyset\}\} = \{1, 2, \emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- $\{1, 2, \{1, 2\}\} \cup \{1, \{1\}\} = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$.

(III) Разлика

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \notin B\}.$$

$A \setminus B$ е множеството, за което е изпълнена формулата

$$(\forall x)[x \in A \setminus B \ \leftrightarrow \ (x \in A \ \wedge \ x \notin B)].$$

Примери:

- $A \setminus \emptyset = A$, за всяко множество A.
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$, за всяко множество A.
- $\{1, 2, \emptyset\} \setminus \{1, 2, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$.
- $\{1, 2, \{1, 2\}\} \setminus \{1, \{1\}\} = \{2, \{1, 2\}\}$.

(IV) Симетрична разлика

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

$A \triangle B$ е множеството, за което е изпълнена формулата

$$(\forall x)[x \in A \triangle B \ \leftrightarrow \ [(x \in A \ \wedge \ x \notin B) \vee (x \in B \ \wedge \ x \notin A)]].$$

Примери:

- $A \triangle \emptyset = A$, за всяко множество A.
- $A \triangle A = \emptyset$, за всяко множество A.
- $A \triangle B = B \triangle A$, за всеки две множества A и B.
- $\{1, 2, \emptyset\} \triangle \{1, 2, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- $\{1, 2, \{1, 2\}\} \triangle \{1, \{1\}\} = \{2, \{1, 2\}\} \cup \{\{1\}\} = \{2, \{1\}, \{1, 2\}\}$.

(V) Степенно множество

$$\mathscr{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}.$$

$\mathscr{P}(A)$ е множеството, за което е изпълнена формулата

$$(\forall x)[x \in \mathscr{P}(A) \ \leftrightarrow \ (\forall y)[y \in x \rightarrow y \in A]].$$

Примери:

- $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathscr{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

- $\mathscr{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
- $\mathscr{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Нека имаме редица от множества $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Тогава имаме следните операции:

(I) Обединение на редица от множества

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \exists i(1 \leq i \leq n \;\&\; x \in A_i)\}.$$

$$(\forall x)[x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \;\leftrightarrow\; (\exists i)[1 \leq i \leq n \;\wedge\; x \in A_i]].$$

(II) Сечение на редица от множества

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \forall i(1 \leq i \leq n \to x \in A_i)\}.$$

$$(\forall x)[x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \;\leftrightarrow\; (\forall i)[1 \leq i \leq n \;\to\; x \in A_i]].$$

Пример 4. Нека $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\}$ и $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$. Тогава :

$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$,

$A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\}$,

$A \setminus B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 3\}$,

$B \setminus A = \emptyset$,

$A \triangle B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 3\}$

Задача 8. Нека $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq \frac{1}{2}\}$. Намерете множествата $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$.

Задача 9. Намерете $\mathscr{P}(A)$, където:

а) $A = \emptyset$.

б) $A = \{\{1, 2\}\}$.

в) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

г) $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, 7\}$.

д) $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Задача 10. Проверете:

а) $A \subseteq B \;\leftrightarrow\; A \setminus B = \emptyset \;\leftrightarrow\; A \cup B = B \;\leftrightarrow\; A \cap B = A$;

б) $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$, $A \setminus B = B \setminus A$.

в) $A \cap (B \cup A) = A \cap B$;

г) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ и $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

д) $C \subseteq A \ \& \ C \subseteq B \to C \subseteq A \cap B$;

е) $A \subseteq C \ \& \ B \subseteq C \to A \cup B \subseteq C$;

ж) $(\bigcup_{i=1}^n A_i) \cap B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)$;

з) $(\bigcap_{i=1}^n A_i) \cup B = \bigcap_{i=1}^n (A_i \cup B)$;

и) $A \backslash B = A \ \leftrightarrow \ A \cap B = \emptyset$;

к) $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$ и $A \backslash B = A \backslash (A \cup B)$;

л) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

м) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$;

н) $C \setminus (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$ и $C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$

о) $C \backslash (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigcap_{i=1}^n (C \backslash A_i)$ и $C \backslash (\bigcap_{i=1}^n A_i) = \bigcup_{i=1}^n (C \backslash A_i)$;

п) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$ и $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$;

р) $A \triangle B = B \triangle A$ и $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

с) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

т) $A \backslash B = A \triangle (A \cap B)$

у) $A \cap (B \triangle C) = (A \cup B) \triangle (A \cup C)$

ф) $A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B)$

х) $A \triangle A = A$ и $A \triangle B = \emptyset \ \leftrightarrow \ A = B$;

ц) $A \triangle B = C \ \leftrightarrow \ B \triangle C = A \ \leftrightarrow \ C \triangle A = B$;

ч) $A \subseteq B \Rightarrow \mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$;

ш) $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ и $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$;

Задача 11. Да се решат системите с променлива X:

а) $\left| \begin{array}{lcl} A \setminus X & = & B \\ X \setminus A & = & C, \end{array} \right.$

където са дадени множествата A, B, C и $B \subseteq A$, $A \cap C = \emptyset$;

б) $\left| \begin{array}{lcl} A \cap X & = & B \\ A \cup X & = & C, \end{array} \right.$

където са дадени множествата A, B, C и $B \subseteq A \subseteq C$;

в) $\left| \begin{array}{lcl} A \setminus X & = & B \\ A \cup X & = & C, \end{array} \right.$

където са дадени множествата A, B, C и $B \subseteq A \subseteq C$.

Пример 5. Нека съвкупността от обекти D е определена като

$$D = \{A \mid A \text{ е множество и } A \notin A\}.$$

Тогава:

а) Ако $D \in D$, то $D \notin D$. Противоречие.

б) Ако $D \notin D$, то $D \in D$. Противоречие.