Примерни решения на задачите от поправителния изпит по "Дискретни структури" — СУ, ФМИ, 1. IX. 2022 г.

Изпитът е за студентите от специалност “Информатика”.

Зад. 1. Докажете, че за всяко цяло число $n \geq 2$ е в сила:

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \frac{2}{n^2}.$$

Решение: Ще го докажем с индукция по n. Базата е $n = 2$. Твърдението става

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \frac{2}{2^2} \;&\leftrightarrow\\
1-\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2} \;&\leftrightarrow\\
\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2} \;&\leftrightarrow\\
\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} < \frac{1}{2} \;&\leftrightarrow\\
\frac{(\sqrt{2})^2-1^2}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} < \frac{1}{2} \;&\leftrightarrow\\
\frac{1}{2+\sqrt{2}} < \frac{1}{2},&
\end{aligned}$$

което очевидно е вярно, понеже $\sqrt{2} > 0$.

Индуктивното предположение е, че

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \frac{2}{n^2}.$$

за някое $n \geq 2$.

Да разгледаме

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

В сила са следните неравенства и равенства:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) &= \left(\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \quad \texttt{// съгласно с индуктивното предположение}\\
&< \frac{2}{n^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\\
&= \frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{n^2\sqrt{n+1}}\\
&= \frac{2(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}+1)}{n^2\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+1)}\\
&= \frac{2(n+1-1)}{n^2(n+1+\sqrt{n+1})}\\
&= \frac{2}{n(n+1+\sqrt{n+1})}\\
&= \frac{2}{n(n+1)+n\sqrt{n+1}} \quad \texttt{// тъй като } n \geq \sqrt{n+1} \texttt{ за всяко } n \geq 2\\
&\leq \frac{2}{n(n+1)+\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}}\\
&= \frac{2}{n(n+1)+n+1}\\
&= \frac{2}{(n+1)(n+1)}\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Доказахме, че $\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \frac{2}{(n+1)^2}$, използвайки индуктивното предположение и факта, че $n \geq \sqrt{n+1}$ за всяко $n \geq 2$. Този факт е очевиден, но за пълнота трябва да бъде доказан. Ето как може да бъде доказан: $(n-1)^2 \geq 0$, тоест $n^2-2n+1 \geq 0$. Тогава

$$n^2 \geq 2n-1 \leftrightarrow n^2 \geq n+n-1.$$

Но щом $n \geq 2$, в сила е

$$n^2 \geq n+2-1,$$

тоест $n^2 \geq n+1$. Тогава $n \geq \sqrt{n+1}$.

Зад. 2. Колко са низовете с дължина десет над азбуката $\{0\,;1\,;\ldots\,;9\}$, които съдържат всяка буква поне веднъж и нямат повтаряне на букви? **(2 точки)**
Колко от тях не съдържат нито един от поднизовете 012, 2345, 89? **(23 точки)**

Решение: В първия въпрос се пита колко са пермутациите на десет букви. Те са $10! = 3\,628\,800$.

Сега да видим колко от тези пермутации не съдържат нито един от забранените поднизове. Нека x означава низа 012, y означава низа 2345 и z означава низа 89. Нека N_x е броят на поднизовете, които **съдържат** x, и аналогично за y и z. Нека $N_{x,y}$ е броят на низовете, които **съдържат** и x, и y; нека $N_{x,z}$ и $N_{y,z}$ имат аналогичен смисъл. Нека $N_{x,y,z}$ е броят на низовете, които **съдържат** и x, и y, и z. Съгласно с комбинаторния принцип за включването и изключването броят N на пермутациите, които **съдържат** поне един от забранените поднизове, е

$$N = N_x + N_y + N_z - (N_{x,y} + N_{x,z} + N_{y,z}) + N_{x,y,z}\,. \tag{1}$$

Тогава отговорът е $10! - N$.

Да намерим N.

- N_x е $8!$, защото може да гледаме на $x = 012$ като на едно блокче, така че N_x е броят на пермутациите на блокчето и още седем елемента, което прави общо осем елемента. Аналогично, $N_y = 7!$ и $N_z = 9!$.

- $N_{x,y}$ е $5!$, понеже x и y имат обща буква '2' и единственият начин да се срещат едновременно е като подниза 012345, тоест едно блокче и още четири елемента, което прави общо пет елемента. $N_{x,z}$ е $7!$, защото x и z не могат да се припокриват и присъстват като две отделни блокчета с общо пет елемента; останалите пет букви са пет други елемента, така че елементите са общо седем. $N_{y,z}$ е $6!$ с напълно аналогични съображения, понеже y и z също не могат да се припокриват.

- $N_{x,y,z}$ е $4!$, защото толкова са пермутациите на едно блокче 012345, друго блокче 89 и още два елемента: 6 и 7.

Замествайки тези резултати в (1), получаваме:

$$N = 8! + 7! + 9! - (5! + 7! + 6!) + 4! = 402\,384.$$

Отговорът е $3\,628\,800 - 402\,384 = 3\,226\,416$.

Зад. 3. Да си припомним една дефиниция: *мост* в граф е всяко ребро, чието изтриване увеличава (с единица) броя на свързаните компоненти. Нека G е граф, в който всички върхове са от четна степен. Професор Дълбоков казва, че в G не може да има мост. Доцент Графов пък казва, че може. Кой от двамата е прав?

Решение: Професор Дълбоков е прав. Да допуснем, че в G има мост $e = (u, v)$. Това ребро принадлежи на някоя свързана компонента G_1 на G. Но G_1 е граф сам по себе си. По условие всички негови върхове са от четна степен. Да изтрием e от G_1. Получаваме точно две свързани компоненти. Забелязваме, че в едната от тях връх u е от нечетна степен и няма други върхове от нечетна степен. Но съгласно с изученото на лекции това е невъзможно, понеже във всеки граф върховете от нечетна степен са четен брой.

Полученото противоречие показва, че в граф с върхове от четна степен не може да има мост.

Зад. 4. Колко булеви функции на 20 променливи нямат нито една фиктивна променлива?

Решение: Нека $\mathbf{G}^n$ е множеството от булевите функции на n променливи, които нямат фиктивна променлива. Нека $\mathbf{H}^n$ е множеството на булевите функции на n променливи, които имат поне една фиктивна променлива. Очевидно $|\mathbf{G}^n|+|\mathbf{H}^n| = 2^{2^n}$ съгласно с комбинаторния принцип на разбиването, така че

$$|\mathbf{G}^n| = 2^{2^n} - |\mathbf{H}^n|$$

Ако променливите са $x_1, \ldots, x_n$, нека $\mathbf{H}^n(i_1, \ldots, i_k)$ означава множеството от булевите функции, в които променливите $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ са гарантирано фиктивни (може да има и други фиктивни), където $k \in \{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$ и $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

Да разгледаме без ограничение на общността променливата x_1. В колко функции тя е фиктивна? От дефиницията на фиктивна променлива имаме изискването за всяка от тези функции, да кажем f, да е изпълнено:

$$f(0, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Ако си представим входните вектори, наредени лексикографски отгоре надолу, иска се функцията, която е колона с височина 2^n, да е такава, че горната половина на колоната да е точно като долната половина. Заключаваме, че броят на функциите, в които x_1 е фиктивна, е $2^{\frac{1}{2}\cdot 2^n} = 2^{2^{n-1}}$. Същото е в сила и за всяка друга променлива, но за другите променливи половините вектори не са горната и долната; за x_2 например колоната от стойности върху първата и третата четвъртина повтаря колоната от стойности върху втората и четвъртата четвъртина; и така нататък.

Всяка променлива на функцията може да е фиктивна. Но $|\mathbf{H}^n|$ **не е** $n \cdot 2^{2^{n-1}}$, тъй като този израз брои някои функции по няколко пъти. От $n \cdot 2^{2^{n-1}}$ ще изваждаме по принципа за включване и изключване: ще намерим колко са функциите, в които две променливи са гарантирано фиктивни, в колко три променливи са гарантирано фиктивни и така нататък, в колко функции всички n са фиктивни; и ще построим израз с алтерниращи положителни и отрицателни знаци съгласно с принципа за включване и изключване:

$$|\mathbf{H}^n| = \sum_{1\leq i_1 \leq n} |\mathbf{H}^n(i_1)| - \sum_{1\leq i_1 < i_2 \leq n} |\mathbf{H}^n(i_1, i_2)| + \sum_{1\leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |\mathbf{H}^n(i_1, i_2, i_3)| - \cdots + (-1)^{n-1} |\mathbf{H}^n(i_1, \ldots, i_n)|.$$

Както вече видяхме, $\sum_{1\leq i_1 \leq n} |\mathbf{H}^n(i_1)| = \binom{n}{1} 2^{2^{n-1}}$.

Аналогично, $\sum_{1\leq i_1 < i_2 \leq n} |\mathbf{H}^n(i_1, i_2)| = \binom{n}{2} 2^{2^{n-2}}$, $\sum_{1\leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |\mathbf{H}^n(i_1, i_2, i_3)| = \binom{n}{3} 2^{2^{n-3}}$ и така нататък. Последното събираемо по абсолютна стойност е $|\mathbf{H}^n(i_1, \ldots, i_n)| = |\mathbf{H}^n(1, \ldots, n)| = \binom{n}{n} 2^{2^{n-n}} = 1 \times 2^{2^0} = 2$; наистина, функциите, в които всички n променливи са фиктивни, са точно две на брой, а именно константата нула и константата единица.

И така, броят на функциите с поне една фиктивна променлива е

$$|\mathbf{H}^n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}.$$

Тогава броят на функциите без фиктивни променливи е:

$$|\mathbf{G}^n| = 2^{2^n} - \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}} \right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}.$$

В тази задача се търси $|\mathbf{G}^{20}|$. Отговорът е

$$|\mathbf{G}^{20}| = 2^{2^{20}} - \left(\sum_{k=1}^{20} (-1)^{k-1} \binom{20}{k} 2^{2^{20-k}} \right) = \sum_{k=0}^{20} (-1)^{k} \binom{20}{k} 2^{2^{20-k}}.$$