

ВЪВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЯТА НА МНОЖЕСТВАТА

Зад. 1 Кои от следните множества са равни?

1. $\{1, 2, 3, 5\}$
2. $\{1, 2, 1\}$
3. $\{2, 2, 1\}$
4. $\{1, \{1, 2, 2, 1\}, 1, \{1, 2\}\}$
5. $\{1\}$
6. $\{\{1\}\}$
7. $\{\{\{1\}\}\}$
8. $\{\{\{1, 1\}\}\}$
9. $\{\{\{1\}, \{1\}\}\}$

Зад. 2 Нека A е множеството $A = \{a, b, \{a\}, \{\{a, b\}\}, \{a, b\}\}$, където a и b са протоеlementи. Кои от следните твърдения са верни?

1. $a \in A$
2. $a \subseteq A$
3. $\{a\} \in A$
4. $\{a\} \subseteq A$
5. $\{a, b\} \in A$
6. $\{a, b\} \subseteq A$
7. $\{a, b\} \subset A$
8. $\{\{a, b\}\} \in A$
9. $\{\{a, b\}\} \subseteq A$
10. $\{\{\{a, b\}\}\} \in A$
11. $\{\{\{a, b\}\}\} \subseteq A$

Зад. 3 Кои от следните твърдения са верни?

1. $\emptyset \in \emptyset$
2. $\emptyset \subseteq \emptyset$
3. $\emptyset \subset \emptyset$
4. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
5. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
6. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

Нотация 1. Множеството от естествените числа $\{0, 1, \dots\}$ се означава с \mathbb{N} . Множеството от целите числа $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ се означава с \mathbb{Z} . \square

Зад. 4 Определете всички елементи на следните множества.

1. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 4 \leq x \wedge x \leq 9\}$
2. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 4 \leq x \wedge x \geq 9\}$
3. $\{1 + (-1)^x \mid x \in \mathbb{N}\}$
4. $\{1 + \frac{1}{x} \mid x \in \{2, 3, 5\}\}$
5. $\{n^2 + n^3 \mid n \in \{2, 3, 5\}\}$

Зад. 5 Нека множествата A, B, C, D, E, F, G и H са определени така:

$$A = \mathbb{N} \quad B = \{n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad C = \{n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\} \quad D = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$E = \{n + 11 \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad F = \{n - 4 \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad G = \{2n + 2 \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad H = \{2n + 16 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Определете кои от тези множества са равни едно на друго.

Определение 1. Нека A и B са произволни множества, а U е подходящ универсум. Дефинираме следните операции:

обединение $A \cup B \stackrel{def}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

сечение $A \cap B \stackrel{def}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

разлика $A \setminus B \stackrel{def}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

симетрична разлика $A \Delta B \stackrel{def}{=} \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$

допълнение $\overline{A}^U \stackrel{def}{=} \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$

\square

Зад. 6 Използвайки познанията от съждителната логика, обосновайте следната таблица на петте операции:

| A | B | $A \cup B$ | $A \cap B$ | $A \setminus B$ | $A \Delta B$ | \bar{A} |
|---|---|------------|------------|-----------------|--------------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Теорема 1. Нека A , B и C са произволни множества. Нека U е подходящ универсум. Следните равенства са в сила:

свойства на празното множество и универсума : $A \cap U = A$, $A \cup U = U$,
 $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$.

свойства на допълнението: $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = U$.

идемпотентност: $A \cap A = A$, $A \cup A = A$.

закон за двойното допълнение: $\overline{\bar{A}} = A$.

комутативност: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.

асоциативност: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

дистрибутивност: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

закони на Де Морган: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

поглъщане: $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$. □

Зад. 7 Докажете Теорема 1 чрез табличния метод.

Решение: Ще докажем единия от законите на Де Морган:

| A | B | $A \cup B$ | $\overline{A \cup B}$ | \bar{A} | \bar{B} | $\bar{A} \cap \bar{B}$ |
|---|---|------------|-----------------------|-----------|-----------|------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Желаният резултат следва от равенството на колона 4 (зелено) и колона 7 (оранжево). □

Зад. 8 Нека A , B , C и D са произволни множества. Да се докаже или опровергае всяко от следните твърдения:

1. $A \cap B = \emptyset \wedge B \cap C = \emptyset \rightarrow A \cap C = \emptyset$

2. $A \cap B = \emptyset \wedge C \cap D = \emptyset \rightarrow (A \cap C) \cap (B \cap D) = \emptyset$

3. $A \cap B = \emptyset \wedge C \cap D = \emptyset \rightarrow (A \cup C) \cap (B \cup D) = \emptyset$

Решение:

(1) не е вярно. За да докажем това, достатъчно е да демонстрираме един единствен *контрапример* – три множества A , B и C , за които твърдението не е вярно. Защо е достатъчен един контрапример? – защото твърдението всъщност е

$$\forall A \forall B \forall C (A \cap B = \emptyset \wedge B \cap C = \emptyset \rightarrow A \cap C = \emptyset)$$

Нека $A = \{1, 2\}$, $B = \{4\}$ и $C = \{2, 3\}$. Вярно е, че $A \cap B = \emptyset \wedge B \cap C = \emptyset$, но $A \cap C = \{2\}$.

(2) е вярно. Да разгледаме множеството $(A \cap C) \cap (B \cap D)$:

$$\begin{aligned} (A \cap C) \cap (B \cap D) &= && \text{(асоциативност)} \\ A \cap C \cap B \cap D &= && \text{(комутативност)} \\ A \cap B \cap C \cap D &= && \text{(асоциативност)} \\ (A \cap B) \cap (C \cap D) &= && \text{(предпоставки } A \cap B = \emptyset \text{ и } C \cap D = \emptyset) \\ \emptyset \cap \emptyset &= && \text{(свойства на празното множество)} \\ \emptyset & & & \end{aligned}$$

(3) не е вярно. Като контрапример да разгледаме множествата $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{4, 5\}$ и $D = \{2, 6\}$. $A \cap B = \emptyset \wedge C \cap D = \emptyset$ е изпълнено, но $(A \cup C) \cap (B \cup D) = \{1, 2, 4, 5\} \cap \{3, 4, 2, 6\} = \{2, 4\} \neq \emptyset$.

Зад. 9 Докажете чрез табличния метод, че $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Зад. 10 Докажете чрез разсъждения (а не чрез таблица), че $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Решение:

$$\begin{aligned} A \setminus B &= && \text{(по дефиниция)} \\ \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} &= && \text{(дефиниция на допълнение)} \\ \{x \mid x \in A \wedge x \in \overline{B}\} &= && \text{(дефиниция на сечение)} \\ A \cap \overline{B} & & & \end{aligned}$$

□

Зад. 11 Докажете чрез еквивалентни преобразувания, че $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Решение:

$$\begin{aligned}A \setminus (B \cup C) &= \quad (\text{съгласно Задача 10}) \\A \cap \overline{B \cup C} &= \quad (\text{закопи на Де Морган}) \\A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) &= \quad (\text{асоциативност}) \\A \cap \overline{B} \cap \overline{C} &= \quad (\text{асоциативност}) \\(A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} &= \quad (\text{съгласно Задача 10}) \\(A \setminus \overline{B}) \cap \overline{C} &= \quad (\text{закон за двойното допълнение}) \\(A \setminus B) \cap \overline{C} &= \quad (\text{съгласно Задача 10}) \\(A \setminus B) \setminus \overline{C} &= \quad (\text{закон за двойното допълнение}) \\(A \setminus B) \setminus C &\end{aligned}$$

□

Зад. 12 Докажете или опровергайте, че

1. $(A \cap B) \setminus (A \setminus C) = A \cap B \cap C$
2. $A \setminus ((B \setminus C) \cup (A \cap C)) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
3. $\overline{\overline{A \cup C} \setminus (A \cap B)} = A \setminus (B \cup C)$
4. $\overline{A \setminus C} \cup B \cap \overline{C} = \overline{(A \cap B) \setminus C}$
5. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
6. $\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}} = B \cup C$
7. $\overline{A \Delta B} = A \Delta \overline{B}$
8. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

Зад. 13 Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ и $D = \{2, 4, 6, 8\}$, а универсумът е $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Определете

1. $(A \cup B) \cap C$
2. $A \cup (B \cap C)$
3. $\overline{C} \cup \overline{D}$
4. $\overline{C \Delta D}$
5. $(A \cup B) \setminus C$
6. $A \cup (B \setminus C)$
7. $(B \setminus C) \setminus D$

8. $B \setminus (C \setminus D)$

9. $(A \cup B) \setminus (C \cap D)$

Зад. 14 Докажете чрез табличния метод, че ако $C \subseteq B \setminus A$, то $\bar{A} \cap (B \cup C) = (A \cup B) \setminus A$.

Решение: Първо да направим пълната таблица на $\bar{A} \cap (B \cup C)$ и $(A \cup B) \setminus A$.

| A | B | C | \bar{A} | $B \cup C$ | $\bar{A} \cap (B \cup C)$ | $A \cup B$ | $(A \cup B) \setminus A$ |
|---|---|---|-----------|------------|---------------------------|------------|--------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Зелената и оранжевата колона не са равни. Но досега не сме използвали предпоставката, че $C \subseteq B \setminus A$. В общия случай (без тази предпоставка) множеството C се разбива на четири подмножества:

1. множеството от елементите на C , принадлежащи нито на A , нито на B ; на това множество съответства векторът 001
2. множеството от елементите на C , принадлежащи на A , но принадлежащи на B ; на това множество съответства векторът 011
3. множеството от елементите на C , принадлежащи на A , но принадлежащи на B ; на това множество съответства векторът 101
4. множеството от елементите на C , принадлежащи и на A , и на B ; на това множество съответства векторът 111.

Имайки предвид предпоставката $C \subseteq B \setminus A$, ясно е, че множествата (1), (3) и (4) са празни. Това значи да игнорираме втория, шестия и осмия ред на таблицата:

| A | B | C | \bar{A} | $B \cup C$ | $\bar{A} \cap (B \cup C)$ | $A \cup B$ | $(A \cup B) \setminus A$ |
|---|---|---|-----------|------------|---------------------------|------------|--------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

В таблицата от останалите редове, шестата и осмата колона са равни:

| A | B | C | \bar{A} | $B \cup C$ | $\bar{A} \cap (B \cup C)$ | $A \cup B$ | $(A \cup B) \setminus A$ |
|---|---|---|-----------|------------|---------------------------|------------|--------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

□

Зад. 15 Нарисувайте диаграма на Вен за трите множества A , B и C , ако е дадено, че

- $A \subset B$ и $B \subset C$
- $A \subset B$ и $C \subset B$
- $A \subset B$, $C \subset B$ и $A \cap C = \emptyset$

Зад. 16 Нека

$$A = \{1, 2, 4, 6, 7, 9, 11\}$$

Напишете всички подмножества на A , които

- съдържат точно две четни и точно едно нечетно число,
- съдържат точно пет елемента,
- не съдържат четни елементи.

Зад. 17 Дайте пример за три множества A , B и C , такива че

- $A \in B$ и $B \in C$ и $A \notin C$,
- $A \in B$ и $B \in C$ и $A \in C$,

Зад. 18 Докажете следните резултати за произволни множества A , B , C , D , без да ползвате диаграми на Вен (допуснете, че е даден подходящ универсум U):

1. Ако $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$, то $A \cap C \subseteq B \cap D$ и $A \cup C \subseteq B \cup D$.
2. $A \subseteq B$ тогава и само тогава, когато $A \cap \bar{B} = \emptyset$.
3. $A \subseteq B$ тогава и само тогава, когато $\bar{A} \cap B = \emptyset$.

Решение: Ще покажем, че ако $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$, то $A \cap C \subseteq B \cap D$. От дефиницията на подмножество знаем, че

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

където домейнът на x е U . Аналогично,

$$C \subseteq D \leftrightarrow \forall x(x \in C \rightarrow x \in D)$$

$$A \cap C \subseteq B \cap D \leftrightarrow \forall x(x \in A \cap C \rightarrow x \in B \cap D)$$

Трябва да покажем, че изводът

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in C \rightarrow x \in D) \rightarrow \forall x(x \in A \cap C \rightarrow x \in B \cap D)$$

е валиден. За да се освободим от кванторите, ще разгледаме следните прости съждения. Нека

- p е съждението $a \in A$ за произволен елемент a от универсума
- q е съждението $a \in B$ за същия a
- r е съждението $b \in C$ за произволен елемент b от универсума
- s е съждението $b \in D$ за същия b .

Тогава предпоставките са $p \rightarrow q$ и $r \rightarrow s$, а изводът можем да запишем като $p \wedge r \rightarrow q \wedge s$. Ще покажем, че

$$(p \rightarrow q \wedge r \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge s)$$

е тавтология. Първо ще преобразуваме израза с еквивалентни преобразувания:

$$(p \rightarrow q \wedge r \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge s) \equiv (\text{съгласно } x \rightarrow y \equiv \neg x \vee y)$$

$$\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s)) \vee \neg(p \wedge r) \vee (q \wedge s) \equiv (\text{закони на Де Морган, асоциативност})$$

$$(p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg s) \vee \neg p \vee \neg r \vee (q \wedge s)$$

Да наречем тази дизюнкция, Z . Ще покажем, че Z е тавтология.

| p | q | r | s | $\neg p$ | $\neg r$ | $p \wedge \neg q$ | $r \wedge \neg s$ | $q \wedge s$ | Z |
|-----|-----|-----|-----|----------|----------|-------------------|-------------------|--------------|-----|
| F | F | F | F | T | T | F | F | F | T |
| F | F | F | T | T | T | F | F | F | T |
| F | F | T | F | T | F | F | T | F | T |
| F | F | T | T | T | F | F | F | F | T |
| F | T | F | F | T | T | F | F | F | T |
| F | T | F | T | T | T | F | F | T | T |
| F | T | T | F | T | F | F | T | F | T |
| F | T | T | T | T | F | F | F | T | T |
| T | F | F | F | F | T | T | F | F | T |
| T | F | F | T | F | T | T | F | F | T |
| T | F | T | F | F | F | T | T | F | T |
| T | F | T | T | F | F | T | F | F | T |
| T | T | F | F | F | T | F | F | F | T |
| T | T | F | T | F | T | F | F | T | T |
| T | T | T | F | F | F | F | T | F | T |
| T | T | T | T | F | F | F | F | T | T |

Зад. 19 Докажете, че следните твърдения са еквивалентни за всички множества A и B (допуснете, че U е подходящ универсум):

а) $A \subseteq B$

б) $A \cup B = B$

в) $A \cap B = A$

г) $\bar{B} \subseteq \bar{A}$

Решение: Трябва да се покаже, че две по две твърденията са еквивалентни. Наивният начин е за всяка (ненаредена) двойка твърдения да се докаже желаната еквивалентност, примерно **а) \equiv б)**, **а) \equiv в)**, **а) \equiv г)**, **б) \equiv в)**, и т. н. Това би означавало да докажем общо $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ еквивалентности. По-икономичен начин е да докажем само четири извода:

$$\text{а) } \vdash \text{б), } \text{б) } \vdash \text{в), } \text{в) } \vdash \text{г), } \text{г) } \vdash \text{а).}$$

Защо това е достатъчно, ще стане ясно от следващ материал[†]. И така,

а) \vdash б) Допускаме, че $A \subseteq B$. Трябва да покажем равенство между две множества, а именно $A \cup B$ и B . Ще го покажем на два етапа.

- $B \subseteq A \cup B$. Твърдението е очевиден аналог на извода $p \vdash p \vee q$ от съждителната логика.
- $A \cup B \subseteq B$. Нека p е съждението $x \in A$, а q е съждението $x \in B$. Трябва да докажем валидността на следствието q при предпоставки $p \rightarrow q$ (съответното на $A \subseteq B$) и $p \vee q$ (съответното на $A \cup B$). Ще ползваме еквивалентни преобразувания.

1. $p \rightarrow q$ (предпоставка)
2. $\neg p \vee q$ (от факта, че $u \rightarrow v \equiv \neg u \vee v$)
3. $p \vee q$ (предпоставка)
4. $q \vee q$ (резолуция върху (2.) и (3.))
5. q (идемпотентност върху (4.).)

б) \vdash в) Нека p е съждението $x \in A$, а q е съждението $x \in B$. Трябва да докажем валидността на следствието $p \wedge q \leftrightarrow p$ (съответното на $A \cap B = A$) при предпоставка $p \wedge q \leftrightarrow q$ (съответното на $A \cap B = B$). Чрез таблица ще покажем нещо повече: двете съждения са еквивалентни (с което, без да искаме, показваме и извода **в) \vdash б)**).

| p | q | $p \vee q$ | $p \vee q \leftrightarrow q$ | $p \wedge q$ | $p \wedge q \leftrightarrow p$ | $(p \vee q \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q \leftrightarrow p)$ |
|-----|-----|------------|------------------------------|--------------|--------------------------------|---|
| F | F | F | T | F | T | T |
| F | T | T | T | F | T | T |
| T | F | T | F | F | F | T |
| T | T | T | T | T | T | T |

в) \vdash г) Подходът е аналогичен. Нека p е съждението $x \in A$, а q е съждението $x \in B$. Ще покажем, че $(p \wedge q \leftrightarrow p) \equiv (\neg q \leftrightarrow \neg p)$. От предната таблица знаем, че колоната на $(p \wedge q \leftrightarrow p)$ е $\boxed{T \ T \ F \ T}$. Тривиално е да се покаже, че $(\neg q \leftrightarrow \neg p)$ има същата колона.

г) \vdash а) Използваме аналогичен подход. Доказателството се свежда до това да се покаже, че $\neg q \rightarrow \neg p \equiv p \rightarrow q$, което е добре известен факт (свойство на контрапозитивното). \square

[†]Причината е, че транзитивното затваряне на контур е пълната релация

Зад. 20 Нека $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Намерете множествата

$$\bigcup_{k=1}^n I_k \quad \text{и} \quad \bigcap_{k=1}^n I_k$$

Зад. 21 Нека $J_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Нека $A_i = \mathbb{N} \setminus J_i$. Намерете множествата

$$\bigcup_{k=1}^n A_k \quad \text{и} \quad \bigcap_{k=1}^n A_k$$

Зад. 22 Нека $A = \{1, 2, 4\}$ и $B = \{1\}$. Напишете в явен вид множествата 2^A и $2^{(2^B)}$.

Зад. 23 Нека $A = \{1, 2, 4\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1000\}$. Напишете в явен вид множеството $2^A \cap 2^B$.

Зад. 24 Нека $A = \{3, 6, 9\}$, $B = \{a, b, f, g\}$ и $C = \{3\}$. Напишете в явен вид $A \times B$, $A \times (B \times C)$, $2^A \cap A$, $2^A \cap 2^B$ и $(2^B \times 2^A) \cap 2^{A \times B \times C}$.

Зад. 25 Дайте пример за непразно множество, което е

1. елемент на своето степенно множество,
2. подмножество на своето степенно множество.

Задачи с декартово произведение

Декартовото произведение на две множества A и B е множеството

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Когато разглеждаме декартови произведения от някакви множества, винаги мислим, че съществува универсум, на когото множествата са подмножества. В задачите от типа “Докажете, че $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ” универсумът е множество от протоелементи. В задачите с декартово произведение универсумът има структура – примерно, универсумът за $A \times B$ е декартово произведение $U = U_1 \times U_2$ от два универсума, такива че A е подмножество на U_1 и B , на U_2 .

Зад. 26 Напишете в явен вид декартовото произведение $A \times B$, където $A = \{1, 2, \{3\}\}$ и $B = \{a, b, \{1, a, b\}, \{c\}\}$.

Решение:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, \{1, a, b, c\}), (1, \{c\}), \\ (2, a), (2, b), (2, \{1, a, b, c\}), (2, \{c\}), \\ (\{3\}, a), (\{3\}, b), (\{3\}, \{1, a, b, c\}), (\{3\}, \{c\})\}$$

□

Зад. 27 Докажете, че за всички множества A , B и C в сила са следните равенства:

а) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

б) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

в) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

г) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

Решение: Ще докажем а). От лявата страна на знака за равенство имаме множество, състоящо се от наредени двойки. От дясната страна имаме множество, състоящо се от обединението на две множества, всяко от които е множество от наредени двойки. Универсумът в тази задача е някакво множество, да го наречем U , което е декартово произведение:

$$U = U_1 \times U_2$$

където U_1 е универсум по отношение на A (тоест, всеки елемент на A е елемент на U_1), а U_2 е универсум по отношение на B и C (всеки елемент на B е елемент на U_2 и всеки елемент на C е елемент на U_2). Твърдението, което искаме да докажем, е

$$\forall x \forall y (x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C) \leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)) \quad (1)$$

където x взема стойности от U_1 , а y , от U_2 . Нека a е произволен елемент от U_1 и b е произволен елемент от U_2 . Нека p е съждението $a \in A$, q е съждението $b \in B$ и r е съждението $b \in C$. Ще докажем, че

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge r) \quad (2)$$

От верността на (2) следва верността на (1). Защо? – защото елементите a и b са взети **произволно**, следователно в (2) няма ограничение на общността – израз от вида (2) би имал същата форма за всички възможни вземания на елементи от U_1 и U_2 .

Ще кажем същото нещо по друг начин: въпреки че (1) е израз от предикатната логика, а (2), от съждителната логика, ако докажем (2), с това доказваме и (1), тъй като за a и b няма никакви ограничения, следователно аналогично на (2) твърдение може да се направи за всеки елемент от U_1 и всеки елемент от U_2 – съвкупността от всички тези твърдения всъщност е (1).

Доказателството на (2) е тривиално:

$$\begin{aligned} p \wedge (q \wedge r) &\equiv \quad (\text{асоциативност}) \\ p \wedge q \wedge r &\equiv \quad (\text{идемпотентност}) \\ p \wedge p \wedge q \wedge r &\equiv \quad (\text{комутативност}) \\ p \wedge q \wedge p \wedge r &\equiv \quad (\text{асоциативност}) \\ (p \wedge q) \wedge (p \wedge r) & \end{aligned}$$

□

Забележете приликата и разликата между доказателството, че

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

което извършихме току-що, и доказателството, че

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C) \quad (3)$$

B (3) универсумът за A , B и C е едно и също U . Изразено чрез предикатна логика, твърдението е

$$\forall x(x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \in C)) \quad (4)$$

За произволно $a \in U$, нека u е съждението $a \in A$, v е съждението $a \in B$ и w е съждението $a \in C$. Да напишем израз от съждителната логика, от който да следва (4)

$$u \wedge (v \wedge w) \equiv (u \wedge v) \wedge (u \wedge w) \quad (5)$$

Очевидно, (5) има същата форма като (2).

От тези примери на пръв поглед изглежда, че декартовото произведение и сечението са в някакъв смисъл еквивалентни, понеже и на двете съответства логическия съюз конюнкция – доказването на (1), от една страна, и на (4), от друга страна, се свежда до доказването на едно и също съждение ((2) и (5) са едно и също нещо, написано по два начина). В действителност декартовото произведение и сечението са **принципно различни** операции върху множества. Ще илюстрираме разликата с два други примера. Да разгледаме равенството върху множества

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (6)$$

Това е един от двата закона за поглъщането, написан в термините на теорията на множествата. Написан в термините на предикатната логика, той изглежда така

$$\forall x(x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B) \leftrightarrow x \in A)$$

Съответният израз от съждителната логика е

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad (7)$$

Сега да разгледаме твърдението (очевидно невярно)

$$A \times (A \cup B) = A \quad (8)$$

което се получава от (6) чрез замяна на “ \cap ” с “ \times ”. Забележете, че изразът от съждителната логика, съответстващ на (8), **не е** (7), а е

$$p \wedge (s \vee t) \equiv p \quad (9)$$

който със сигурност е лъжа. Защо изразът от съждителната логика, съответстващ на (8), е (9), а не (7)? Защото (8), написан в предикатна логика, е

$$\forall x \forall y(x \in A \wedge (y \in A \vee y \in B) \leftrightarrow x \in A)$$

където x и y вземат стойности от някакви подходящи домейни. За да напишем съответен израз от съждителната логика, трябва да използваме различни съждителни променливи за $x \in A$ и $y \in A$, понеже говорим за съответно първия и втория елемент от наредените двойки (елементите на декартовото произведение).

Зад. 28 Докажете, че $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Зад. 29 Докажете, че декартовото произведение $A \times B$ не е комутативно. При какви условия за A и B имаме комутативност?