Примерни решения на Домашно №1

Задача 1: n шахматисти играят в турнир, в който всеки участник играе точно една партия с всеки друг участник. Във всяка изиграна партия има победител. Докажете, че има поне един играч X, такъв че за всеки друг играч Y е вярно поне едно от следните:

- Y е загубил от X;
- Y е загубил от някой, който е загубил от X.

Решение: Ще докажем твърдението по индукция по n.

На практика няма смисъл от турнир със само един участник, така че е разумно да вземем база $n = 2$. Не е проблем, ако в доказателството вземем база $n = 1$, просто това е нереалистично.

База. Нека $n = 2$. Да кажем, че играчите са Албена и Борис. БОО, нека Албена печели (което значи, че Борис губи). Твърдението е вярно, като Албена е X.

Индуктивно предположение. Да допуснем, че твърдението е вярно за някое n. С други думи, допускаме, че както и да са завършили партиите между n участници, такъв X има.

Индуктивна стъпка. Разглеждаме турнир T с $n+1$ участници, в който всеки играе точно една партия с всеки от останалите и във всяка партия има победител.

Фиксираме един участник. Да кажем, Яна. Да си представим партиите, в които Яна не участва. Но това е турнир T' с n участници, в който всеки играе точно една партия с всеки от останалите и във всяка партия има победител. Съгласно индуктивното предположение, в T' има участник X, такъв че за всеки друг участник Y, Y е загубил от X или Y е загубил от някой, който е загубил от X. Забележете, че не се твърди, че X е победител в смисъл, че X само е печелил! Множеството от участниците в T' се разделя на три дяла:

- $\{X\}$,
- множеството L от тези, които за загубили от X,
- множеството W от тези, които от които X е загубил. Очевидно е, че всеки от W е загубил от някой от L, за да бъде изпълнено условието за X.

Това не е непременно разбиване съгласно формалната дефиниция, понеже или L, или W може да е празно (но не и двете!), затова и терминът е "разделя", а не "разбива".

Сега да върнем партиите на Яна в турнира, получавайки T. Следните три възможности са изчерпателни.

- Яна е загубила от X. Тогава добавяма Яна към L. Забелязваме, че X продължава да е играч, такъв че за всеки друг участник Y, Y е загубил от X или Y е загубил от някой, който е загубил от X.
- X е загубил от Яна, но Яна е загубила от играч от L. Тогава добавяме Яна към W. Забелязваме, че X продължава да е играч, такъв че за всеки друг участник Y, Y е загубил от X или Y е загубил от някой, който е загубил от X.
- X е загубил от Яна и Яна не е губила партия от никой играч от L. В такъв случай добавяме X към L, а Яна става "новият X". Забелязваме, че сега Яна е играч, такъв че за всеки друг участник Y, Y е загубил от Яна или Y е загубил от някой, който е загубил от Яна.

Доказахме твърдението.

Задача 2: Да разгледаме безкрайната редица $F_0, F_1, F_2, \ldots$, чиито елементи се дефинират така:

$$\forall k \in \mathbb{N} : F_k = \begin{cases} 0, & \text{ако } k = 0 \\ 1, & \text{ако } k = 1 \\ F_{k-1} + F_{k-2}, & \text{ако } k \geq 2 \end{cases}$$

Това са прочутите числа на Fibonacci.
Докажете, че за всяко естествено число n е в сила

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \tag{1}$$

Решение: Ще докажем твърдението със силна индукция по n.

База. Нека $n = 0$. Ще докажем, че

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0$$

Но, по условие, лявата страна F_0 е 0, а дясната страна е $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 1$, което също е 0.
Нека $n = 1$. Ще докажем, че

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1$$

Но, по условие, лявата страна F_1 е 1, а за дясната страна е в сила

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{2} = 1$$

С което доказахме базовите случаи.

Индуктивно предположение. Нека за някое $n \geq 1$ е вярно, че

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k$$

за $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Индуктивна стъпка. Ще докажем, че

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

Съгласно индуктивното предположение,

$$\begin{aligned} F_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \\ F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \end{aligned}$$

Сумираме и получаваме

$$F_{n-1} + F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n} \right) \tag{2}$$

като следствие от индуктивното предположение. Щом $n \geq 1$, то $n+1 \geq 2$, а по условие $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, така че лявата страна на (2) е F_{n+1}. А дясната страна на (2) е

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n} \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4} \right) \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{5-2\sqrt{5}+1}{4} \right) \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}^2+2\sqrt{5}+1}{4} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}^2-2\sqrt{5}+1}{4} \right) \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} \right) \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{(\sqrt{5}+1)}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \right)^2 \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

Доказахме, че

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

Задача 3: Определението на “релация на еквивалентност” е “релация от вида $R \subseteq A^2$, която е рефлексивна, симетрична и транзитивна”. Професор Дълбоков казва, че в това определение има излишък. Той твърди, че ако R е симетрична и транзитивна, тя задължително е рефлексивна.

Професорът се аргументира така. Нека R е симетрична и транзитивна. Разглеждаме произволен елемент $x \in A$. Нека y е произволен елемент от A, такъв че xRy. Но щом R е симетрична и xRy, то yRx. Тогава е вярно, че xRy и yRx. Щом R е транзитивна и е вярно, че xRy и yRx, то xRx. Щом за произволен $x \in A$ е вярно, че xRx, то R е рефлексивна.

Какво бихте казали за това доказателство?

Решение: Доказателството е невалидно. Може да не съществува y, такъв че xRy, и тогава е възможно $(x, x) \notin R$. С други думи, може релацията да е симетрична и транзитивна и да има елемент x, който не е в нито една наредена двойка, поради което релацията не е рефлексивна.

Задача 4: Нека $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x < 1\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 1\}$. Докажете, че A и B са равномощни. За пълен брой точки е достатъчно да конструирате явно биекцията, без да доказвате педантично, че е биекция.

Решение: Да разгледаме следното множество

$$X = \left\{ \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}^{+} \setminus \{1\} \right\}$$

Иначе казано, елементите на X са $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и така нататък. Очевидно $X \subset A$. Също така е очевидно, че X изброимо безкрайно. Функцията f, която конструираме, е такава, че нейната рестрикция върху X изобразява всяко число $\frac{1}{n}$ в $\frac{1}{n+1}$. По този начин нищо не се изобразява върху $\frac{1}{2}$ (от рестрикцията), така че самата f изобразява нулата върху $\frac{1}{2}$. А за всяко число y, което не е нула и не е от X, $f(y) = y$.

Формално,

$$\forall x \in A : f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ако } x = 0 \\ \frac{1}{n+1}, & \text{ако } \exists n \in \mathbb{N}^{+} \setminus \{1\}, \text{ такова че } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Конструирахме биекция $f : A \to B$.