Лекция 8: Рекурентни уравнения

Минко Марков

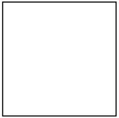
minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

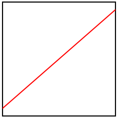
15 ноември 2022 г.

Примерна задача (1)

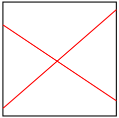
На колко района най-много можем да разделим равнината с n прави?



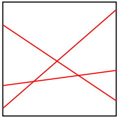
$n = 0$
1 район



$n = 1$
2 района



$n = 2$
4 района



$n = 3$
7 района

Броят на районите се максимизира т.с.т.к. всеки две прави се пресичат в точно една точка и никои три прави не се пресичат в една точка.

Примерна задача (2)

Нека търсеното количество е $L(n)$ за всяко $n \geqslant 0$. Видяхме, че $L(0) = 1$, $L(1) = 2$, $L(2) = 4$ и $L(3) = 7$.

Търсим $L(n)$ за произволно n. Ще изразим $L(n)$ чрез $L(n-1)$.

Примерна задача (3)

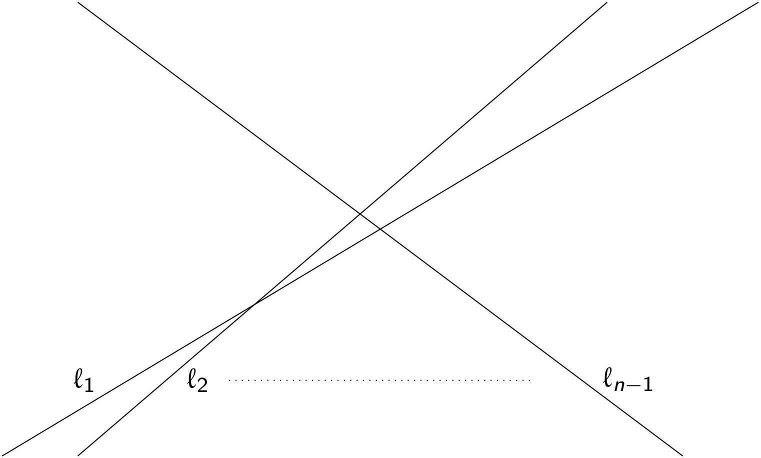
За всяко $n \geqslant 1$ разглеждаме $n-1$ прави $\ell_1, \ldots, \ell_{n-1}$, максимизиращи броя на районите, и слагаме още една права ℓ_n. Новата права ℓ_n пресича всяка от $\ell_1, \ldots, \ell_{n-1}$ в точно една точка; това са $n-1$ точки общо. Броят на районите нараства с едно повече от броя на точките; това значи $(n-1)+1=n$ района в повече.

$L(n)$ е с n повече от $L(n-1)$. Тогава

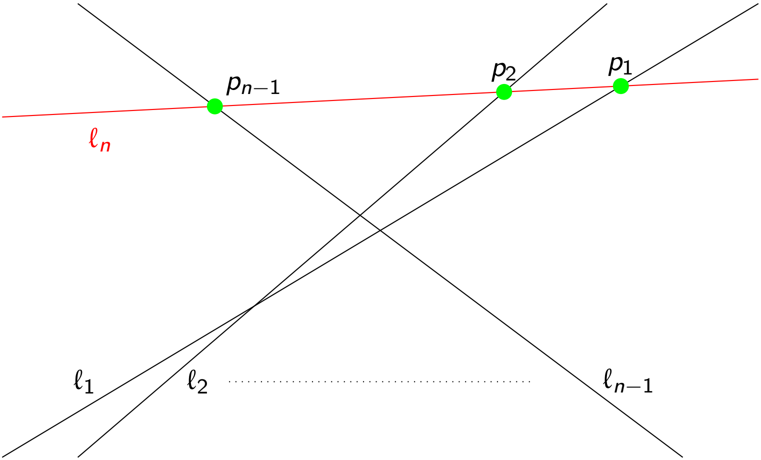
$$L(n) = L(n-1) + n$$

Примерна задача (4)

Правите ℓ_1, ℓ_2, ..., ℓ_{n-1}.



ℓ_n минава през $(n-1)+1 = n$ стари района, "срязвайки" всеки на две. Това дава n района в повече.



Да пресметнем $L(5)$ чрез $L(n) = L(n-1) + n$:

$$
\begin{aligned}
L(5) &= L(4) + 5 \\
&= \underbrace{L(3) + 4}_{L(4)} + 5 \\
&= \underbrace{L(2) + 3}_{L(3)} + 4 + 5 \\
&= \underbrace{L(1) + 2}_{L(2)} + 3 + 4 + 5 \\
&= \underbrace{L(0) + 1}_{L(1)} + 2 + 3 + 4 + 5 \\
&= \underbrace{L(-1) + 0}_{L(0)} + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \quad \text{ПРОБЛЕМ! } L(-1)??
\end{aligned}
$$

Изчислителното правило $L(n) = L(n-1) + n$ е непълно. Трябва да са добави, за поне една стойност на аргумента, второ правило, което дава решение за точно тази стойност.

Примерно, $L(1) = 2$. Или $L(0) = 1$ (това е по-добре – защо?). Съвкупността от двете правила е рекурентно уравнение. В примера:

$$L(n) = \begin{cases} L(n-1) + n, & \text{ако } n \in \mathbb{N}^+ \\ 1, & \text{ако } n = 0 \end{cases}$$

$\boxed{L(0) = 1}$ е *начално условие*. В някои рекурентни уравнения има повече от едно начални условия.

Рекурентно уравнение и неговата функция (1)

Рекурентно уравнение от този вид задава някаква функция от естествените в естествените числа. Функция с домейн естествените числа е *числена редица*. В този пример, редицата е:

$$1, 2, 4, 7, 11, 16, \ldots$$

Тази редица, или функция, е семантиката на уравнението.

Рекурентно уравнение и неговата функция (2)

Да не се бърка уравнението, което е обект от синтактичното ниво, с редицата (функцията), която обект е от семантичното ниво! Всяко рекурентно уравнение има точно една съответна редица, която е неговата семантика, но всяка такава редица има безброй синтактично различни рекурентни уравнения, на които е семантика. Числената редица от примера е редицата и на това уравнение:

$$M(n) = \begin{cases} M(n-2) + 2n - 1, & \text{ако } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \\ 2, & \text{ако } n = 1, \\ 1, & \text{ако } n = 0 \end{cases}$$

Двете уравнения са синтактично различни, но семантично равни (еквивалентни).

Да решим рекурентно уравнение е да намерим формула за дясната страна, която дава същата числова редица. Пример

$$
\begin{aligned}
L(n) &= L(n-1) + n \quad \text{// нека } n \text{ е достатъчно голямо}\\
L(n) &= L(n-2) + (n-1) + n\\
L(n) &= L(n-3) + (n-2) + (n-1) + n\\
&\ldots\\
L(n) &= L(0) + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n\\
L(n) &= 1 + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n\\
L(n) &= 1 + \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Какво е "формула"? Очевидно $\boxed{L(n-1)+n}$ не е.

Решение на рекурентно уравнение (2)

Такова решение се нарича *решение чрез развиване* (unfolding). То не е формално, защото редът $\boxed{\cdots}$ е "скок на въображението". Можем да го докажем по индукция.

Доказателство, че $\forall n \in \mathbb{N} : L(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$. Базата е за $n = 0$. От една страна, $1 + \frac{n(n+1)}{2} = 1$, от друга страна, знаем, че $L(0) = 1$. ✓
Допускаме, че твърдението е вярно за стойност на аргумента n, и разглеждаме твърдението за стойност на аргумента $n + 1$. Дясната страна е

$$1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = 1 + \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = 1 + \frac{(n^2 + n) + (2n + 2)}{2} = 1 + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

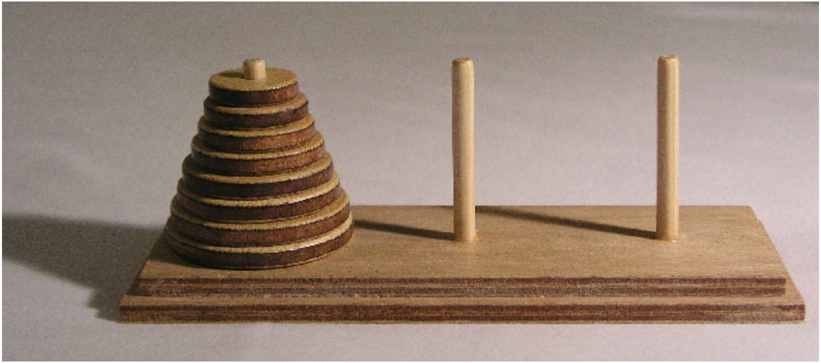
Но от индуктивното предположение знаем, че $1 + \frac{n(n+1)}{2} = L(n)$, така че последното е равно на $L(n) + (n + 1)$. ✓

Предимствата на $\boxed{1 + \frac{n(n+1)}{2}}$ пред $\boxed{L(n-1) + n}$ като дясна страна са поне две:

- Формулата $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ е **много** по-бърз алгоритъм.
- От нея веднага се вижда, че решението е квадратична функция (а не линейна, или експоненциална).

Друг пример: Ханойските кули (1)

От статията *в уикипедия*:



Друг пример: Ханойските кули (2)

Какъв е необходимият и достатъчен брой ходове $H(n)$ за преместване на n диска? Очевидно $H(1) = 1$. За $n > 1$, $H(n) = H(n-1) + 1 + H(n-1)$. Аргументацията е, че в даден момент трябва да преместим най-големия диск от началния върху крайния прът с точно един ход и това дава $+1$; за целта първо останалите $n-1$ диска трябва да бъдат сложени върху помощния прът (ползвайки крайния като помощен), а след преместването на най-големия диск, останалите трябва да се преместят от помощния върху крайния, ползвайки началния като помощен. Накратко,

$$H(n) = \begin{cases} 2H(n-1)+1, & \text{ако } n \geqslant 2, \\ 1, & \text{ако } n = 1 \end{cases}$$

Решение на $H(n) = 2H(n-1)+1, H(1) = 1$

$H(1) = 1$, $H(2) = 3$, $H(3) = 7$, $H(4) = 15$ и така нататък. Изглежда, че

$$H(n) = 2^n - 1 \tag{2}$$

Може да го докажем по индукция, но може и така (полуформално, *ad hoc*). Да мислим за числата вдясно в двоична позиционна бройна система: $H(1) = 1$, $H(2) = 11$, $H(3) = 111$, $H(4) = 1111$ и така нататък. Следващата стойност вдясно ще е 1111, умножено по две, което в двоична система е 11110, плюс едно, което става 11111. На всяка итерация изместваме наляво с една позиция и вмъкваме единица вдясно. Получаваме редица от числа, записани само с единици. Това са точно числата от вида $2^m - 1$, $m \in \mathbb{N}$.

Дадено е рекурентно уравнение

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \tag{3}$$

където $c_1, \ldots, c_k$ са (целочислени) константи, като $c_k \neq 0$, и k е константа. Това е *линейно рекурентно уравнение от k-ти ред с константни коефициенти и крайна история*.

Началните условия са $a_1 = q_1, \ldots, a_k = q_k$, където q_i са цели числа. Или $a_0 = q_0, \ldots, a_{k-1} = q_{k-1}$. Съществено е да са k на брой.

Уравнението

$$T_n = \begin{cases} nT_{n-1}, & \text{ако } n \geqslant 1, \\ 1, & \text{ако } n = 0 \end{cases}$$

не е с константни коефициенти.

Уравнението

$$S_n = \begin{cases} S_{n-1} + S_{n-2} + \cdots + S_1 + S_0, & \text{ако } n \geqslant 1, \\ 1, & \text{ако } n = 0 \end{cases}$$

не е с крайна история.

Такива уравнения не може да бъдат решени с алгоритъма, който ще разгледаме.

Първата стъпка от решаването на (3) е да конструираме *характеристичното уравнение*. Заместваме a_n с x^n, a_{n-1} с x^{n-1} и така нататък и получаваме

$$x^n = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_{k-1} x^{n-k+1} + c_k x^{n-k} \tag{4}$$

Делим на x^{n-k} и получаваме

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_{k-1} x + c_k \tag{5}$$

Алтернативен запис е

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_{k-1} x - c_k = 0 \tag{6}$$

Това е характеристичното уравнение.

Съгласно *основната теорема на алгебрата*, характеристичното уравнение има k на брой, не непременно различни, комплексни корени.

Нека $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}_M$ е мултимножеството от корените.

Теорията казва, че ако корените са два по два различни, *общото решение* е

$$a_n = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \cdots + A_k\alpha_k^n \tag{7}$$

където A_1, ..., A_k са неизвестни константи. Ако началните условия не са дадени, не можем да намерим тези константи и най-доброто решение е именно (7).
Ако обаче началните условия, k на брой, са дадени, можем да намерим A_1, ..., A_k, замествайки n със стойностите на аргумента в началните условия. Ще получим система от k линейни (алгебрични) уравнения с k неизвестни (а именно, A_1, ..., A_k). Рашавайки системата, ще намерим A_1, ..., A_k, а оттам и *точното решение* на рекурентното уравнение.

Нека различните корени са $\beta_1, \ldots, \beta_t$, където $t \leqslant k$. Нека β_i има кратност r_i, за $1 \leqslant i \leqslant t$. Очевидно, $r_1 + \cdots + r_t = k$. Общото решение тогава е

$$\begin{aligned} a_n = & A_{1,1}\beta_1^n + A_{1,2}n\beta_1^n + \cdots + A_{1,r_1}n^{r_1-1}\beta_1^n + \\ & A_{2,1}\beta_2^n + A_{2,2}n\beta_2^n + \cdots + A_{2,r_2}n^{r_2-1}\beta_2^n + \\ & \ldots \\ & A_{t,1}\beta_t^n + A_{t,2}n\beta_t^n + \cdots + A_{t,r_t}n^{r_t-1}\beta_t^n \end{aligned} \tag{8}$$

Двойно индексираните константи $A_{i,j}$ са точно k на брой и може да бъдат намерени от началните условия по начина, който вече разгледахме.

Нека

$$a_n = 12a_{n-1} - 51a_{n-2} + 92a_{n-3} - 60a_{n-4}$$

с начални условия $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 6$.

Характеристичното уравнение е

$$x^4 - 12x^3 + 51x^2 - 92x + 60 = 0 \leftrightarrow (x-2)^2(x-3)(x-5) = 0$$

Мултимножеството от корените му е $\{2, 2, 3, 5\}_M$.

Общото решение е

$$a_n = A2^n + Bn2^n + C3^n + D5^n \tag{9}$$

за някакви константи A, B, C и D.

Константите определяме от началните условия. Замествайки в (9) n с 1, 2, 3 и 4, получаваме

$$
\begin{aligned}
a_1 &= A2^1 + B \cdot 1 \cdot 2^1 + C3^1 + D5^1 \\
a_2 &= A2^2 + B \cdot 2 \cdot 2^2 + C3^2 + D5^2 \\
a_3 &= A2^3 + B \cdot 3 \cdot 2^3 + C3^3 + D5^3 \\
a_4 &= A2^4 + B \cdot 4 \cdot 2^4 + C3^4 + D5^4
\end{aligned}
$$

Знаем, че $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 6$, така че

$$\begin{aligned}
1 &= 2A + 2B + 3C + 5D \\
2 &= 4A + 8B + 9C + 25D \\
4 &= 8A + 24B + 27C + 125D \\
6 &= 16A + 64B + 81C + 625D
\end{aligned}$$

Решението е $A = \frac{2}{9}$, $B = -\frac{1}{6}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = -\frac{1}{45}$. Заместваме в (9) и получаваме

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{9} - \frac{n2^n}{6} + 3^{n-1} - \frac{5^n}{45}$$

Числата на Fibonacci се дефинират с рекурентното уравнение

$$F_n = \begin{cases} F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{ако } n \geqslant 2, \\ 1, & \text{ако } n = 1, \\ 0, & \text{ако } n = 0 \end{cases}$$

Да решим рекурентното уравнение. Характеристичното уравнение е $x^2 - x - 1 = 0$ с корени $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Общото решение е $F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. A и B намираме от началните условия

$$0 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = A + B$$

$$1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Намираме $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Тогава

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Решаване на нехомогенни рекурентни уравнения (1)

Дадено е рекурентно уравнение

$$a_n = \underbrace{c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}}_{\text{хомогенна част}} + \underbrace{p_1(n) \cdot b_1^n + \cdots + p_\ell(n) \cdot b_\ell^n}_{\text{нехомогенна част}} \tag{10}$$

където k и ℓ са константи, $c_1, \ldots, c_k$ са константи, $b_1, \ldots, b_\ell$ са две по две различни константи, а $p_1(n), \ldots, p_\ell(n)$ са полиноми на n.

Съставя се характеристично уравнение само от хомогенната част—за момент забравяме за нехомогенната част—и се намира мултимножеството X от корените, точно както преди.

Решаване на нехомогенни рекурентни уравнения (2)

Нека Y мултимножеството от числата $b_1, \ldots, b_\ell$, всяко от които има кратност колкото е степента на съответния полином плюс едно. Обединяваме мултимножествата X и Y и съставяме общото решение спрямо това обединение по същия начин, както преди. Неизвестните константи се намират чрез началните условия. Има една особеност: дадените начални условия са k, докато обединението на X и Y има кардиналност $k + \ell$, така че неизвестните константи са $k + \ell$ на брой. За да ги намерим си правим още ℓ начални условия от (10).

Обединението на мултимножества е мултимножеството, в което кратността на всеки елемент е сумата от кратностите му в дадените мултимножества.

Ще решим

$$L(n) = \begin{cases} L(n-1) + n, & \text{ако } n \in \mathbb{N}^+ \\ 1, & \text{ако } n = 0 \end{cases}$$

чрез метода с характеристичното уравнение. Първо да се убедим, че фóрмата на рекурентното уравнение е подходяща. Преписваме го така

$$L(n) = \underbrace{L(n-1)}_{\text{хомогенна част}} + \underbrace{n^1 \cdot 1^n}_{\text{нехомогенна част}}$$

Характеристичното уравнение е $x - 1 = 0$ с мултимножество от корените $X = \{1\}_M$.

От нехомогенната част образуваме мултимножеството $Y = \{1, 1\}_M$. То съдържа единици, защото основата на експонентата е единица, а броят им е две, защото степента на полинома е едно. Обединението на X и Y е $\{1, 1, 1\}_M$. Общото решение е $L(n) = A1^n + Bn1^n + Cn^21^n = A + Bn + Cn^2$.

За да намерим A, B и C не е достатъчно даденото начално условие $L(0) = 1$. Правим още две начални условия: $L(1) = 2$ и $L(2) = 4$ и съставяме системата

$$\begin{aligned}
1 &= A + B \cdot 0 + C \cdot 0^2 = A \\
2 &= A + B \cdot 1 + C \cdot 1^2 = A + B + C \\
4 &= A + B \cdot 2 + C \cdot 4
\end{aligned}$$

Намираме $A = 1$, $B = C = \frac{1}{2}$, откъдето

$$L(n) = 1 + \frac{n + n^2}{2}$$

То е практически същото като (1).

Решаваме

$$H(n) = \begin{cases} 2H(n-1) + n^0 \cdot 1^n, & \text{ако } n \geqslant 2, \\ 1, & \text{ако } n = 1 \end{cases}$$

Характеристичното уравнение е $x - 2 = 0$ с мултимножество от корените $\{2\}_M$. От нехомогенната част генерираме мултимножеството $\{1\}_M$: степенната основа е единица, а степента на полинома е нулева. Обединението им е $\{1, 2\}_M$, откъдето общото решение е $H(n) = A1^n + B2^n = A + B2^n$. $H(1) = 1$, $H(2) = 3$ и оттук $1 = A + 2B$, $3 = A + 4B$, откъдето $A = -1$, $B = 1$ и $H(n) = 2^n - 1$, точно като (2).

Намерете сумата $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$.

Нека $S(n) = 1^4 + 2^4 + \cdots + (n-1)^4 + n^4$. Тогава $S(n-1) = 1^4 + 2^4 + \cdots + (n-1)^4$ и

$$S(n) - S(n-1) = n^4 \;\leftrightarrow\; S(n) = S(n-1) + n^4$$

с начално условие $S(1) = 1$.

Вече знаем как се решава такова рекуренто уравнение. Има и още един начин за решаване: с Maple(tm). Кодът е

```
rsolve({S(1) = 1, S(n) = S(n-1)+n^4}, {S});
```

Решението на Maple(tm) е $S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

“Подводни камъни”

Уравнения като $T(n) = 2T(n-1) + \lceil \sqrt{n} \rceil$ или $S(n) = S(n-1) + \frac{1}{n}$ не може да бъдат решени чрез показания алгоритъм, понеже нехомогенната част няма фóрмата, която се иска в (10).

Уравнението $A(n) = 2A(n-1) + 2^{2n+3}n$ може да бъде решено с показания алгоритъм, но първо нехомогенната част трябва да бъде приведена в правилна форма: $A(n) = 2A(n-1) + (8n) \cdot 4^n$. Основата на експонентата в нехомогенната част е 4, а не 2. Степента на полинома е 1, с или без множителя 8.

Аналогично, $B(n) = 2B(n-1) + 2^{\frac{n}{2}}$ трябва да бъде преписано като $B(n) = 2B(n-1) + (n^0) \cdot \sqrt{2}^n$, за да е ясно, че основата на експонентата е $\sqrt{2}$, а не 2, а степента на полинома е 0.

КРАЙ