

Име: Ф№: Група:

Задача	1	2	3	4	5	6	ОБЩО
получени точки							
от максимално	20	20	20	20	20	20	120

Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.

Зад. 1 Нека n е цяло положително число. Казваме, че n е *безквадратно*, ако единственият точен квадрат, който дели n , е 1. С други думи, ако $n = 1$, то n е безквадратно по определение, а ако $n \geq 2$, то n има едно единствено разлагане на прости множители (съгласно основната теорема на аритметиката) и n е безквадратно тогава и само тогава, когато всеки прост множител участва със своята първа степен. Да кажем, че простите множители на n са p_1, p_2, \dots, p_q ; при това допускане n е безквадратно тогава и само тогава, когато $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_q$. Всяко просто число е безквадратно, но не всяко безквадратно е просто. Примерно, безквадратно е 10, защото $10 = 2 \cdot 5$, безквадратно е 11, защото 11 е просто, и 33 също е безквадратно, защото $33 = 3 \cdot 11$. Но 12 не е безквадратно, защото $12 = 2^2 \cdot 3$. Числото 27 също не е безквадратно, защото $27 = 3^3$. Безквадратните числа, ненадхвърлящи 40, са

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39

Намерете броя на безквадратните числа, ненадхвърлящи 200, като използвате принципа на включването и изключването. Искане се отговор-число.

Решения, които не използват принципа на включването и изключването, няма да получат точки.

Зад. 2 Нека $n \in \mathbb{N}^+$. Представете си правоъгълник $2 \times n$ сантиметра и неограничен брой малки правоъгълничета 1×2 сантиметра, както и неограничен брой квадратчета 2×2 сантиметра. *Покриване* на големия правоъгълник $2 \times n$ е всяко слагане на малки правоъгълничета или квадратчета върху големия правоъгълник, такова че никои две от тях не се припокриват и не остава непокрита част. Очевидно сумарната площ на фигурите, участващи в покриването, е $2n$.

10 т. • Съставете рекурентно уравнение за броя на покриванията.

10 т. • Решете рекурентното уравнение.

Зад. 3 Магазин за сандвичи предлага петнадесет различни вида сандвичи. Петима приятели купуват общо по един сандвич от всеки вид. По колко начина може да бъдат раздадени сандвичите на хората, така че всеки да получи един и същи брой сандвичи? Не се иска числен отговор.