## Функции

Релацията $R \subseteq A \times B$ се нарича **функция** от $A$ в $B$, ако

i) $Dom(R) = A$, т.е.
$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)[(a,b) \in R].$$

ii) За всеки елемент $a \in A$ съотвества *точно един* елемент $b \in B$, т.е.
$$(\forall x \in A)(\forall y_1, y_2 \in B)(\langle x, y_1\rangle \in R \ \wedge \ \langle x, y_2\rangle \in R \to y_1 = y_2).$$

Обикновено означаваме функциите като $f : A \to B$ и вместо $(a,b) \in f$ пишем $f(a) = b$. Казваме, че функцията $f$ е

- **инекция**, ако
$$(\forall x_1, x_2 \in A)[x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)],$$
  или еквивалентно,
$$(\forall x_1, x_2 \in A)[f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2].$$
- **сюрекция**, ако
$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)[f(x) = y].$$
- **биекция**, ако е инекция и сюрекция.

**Задача 34.** Дайте примери за функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, която е:

1. нито инективна, нито сюрективна;
2. инективна, но не е сюрективна;
3. сюрективна, но не е инективна;
4. сюрективна и инективна.

**Задача 35.** Докажете:

а) Ако $f, g$ са функции, то $f \cap g$ е функция;

б) Нека $f, g$ са функции и $(\forall x)[x \in Dom(f) \cap Dom(g) \to f(x) = g(x)]$. Докажете, че $f \cup g$ е функция.

**Задача 2.** За всяка от следните функции $f$ определете дали $f$ е инекция, сюрекция или биекция.

а) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$.

б) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

в) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 7$.

г) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ако } x \text{ е четно} \\ x - 1, & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

д) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = rem(x, 3)$.

$rem(x, 3)$ - остатък при деление на 3

е) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) =$ НОД$(x, y)$.

НОД - най-голям общ делител

ж) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = 3x + 2y$.

з) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

## Операции върху функции

Нека е дадена функцията $f : A \to B$. Ще разгледаме няколко основни операции върху функции.

I) **Образ**

Нека $X \subseteq A$. *Образ на множеството* $X$ под действието на функцията $f$, наричаме множеството:

$$f(X) = \{b \in B \mid f(a) = b \ \wedge \ a \in X\}.$$

II) **Първообраз**

Нека $Y \subseteq B$. *Първообраз на множеството* $Y$ под действието на функцията $f$, наричаме множеството:

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) = b \ \wedge \ b \in Y\}.$$

III) **Композиция**

Нека са дадени функциите $f : A \to B$ и $g : C \to A$. *Композиция* на $f$ и $g$ е функцията $f \circ g : C \to B$ определена като

$$f \circ g = \{\langle c, b\rangle \mid (\exists a \in A)[g(c) = a \ \wedge \ f(a) = b]\}.$$

Композицията на $f$ и $g$ може да се запише и така:

Най-напред прилагаме $g$ и след това $f$

$$(\forall c \in C)[(f \circ g)(c) = f(g(c))]$$

**Задача 3.** Нека $f : A \to B$, $g : B \to C$ са функции. Вярно ли е, че:

1. Ако $f$ не е инекция, то $f \circ g$ не е инекция?
2. Ако $g$ не е инекция, то $f \circ g$ не е инекция?
3. Ако $f$ не е сюрекция, то $f \circ g$ не е сюрекция?
4. Ако $g$ не е сюрекция, то $f \circ g$ не е сюрекция?

**Задача 36.** Нека а дадена произволна функция $f : A \to B$. Проверете:

а) $(\forall X, Y \subseteq A)[f(X) \cup f(Y) = f(X \cup Y)]$;

б) $f(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I}(X_i)$

в) при какви условия за $f$, $(\forall X, Y \subseteq A)[f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)]$.

г) при какви условия за $f$, $(\forall X, Y \subseteq A)[f(X) \backslash f(Y) = f(X \backslash Y)]$.

д) $(\forall X, Y \subseteq B)[f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

е) $(\forall X, Y \subseteq B)[f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

ж) $(\forall X, Y \subseteq B)[f^{-1}(X \backslash Y) = f^{-1}(X) \backslash f^{-1}(Y)]$.

з) при какви условия за $f$, $(\forall X \subseteq A)[X = f^{-1}(f(X))]$.

и) при какви условия за $f$, $(\forall Y \subseteq B)[Y = f(f^{-1}(Y))]$.

к) $(\forall X \subseteq A)(\forall Y \subseteq B)[f(X) \cap Y = f(X \cap f^{-1}(Y))]$.

л) $(\forall X \subseteq A)(\forall Y \subseteq B)[f(X) \cap Y = \emptyset \ \leftrightarrow \ X \cap f^{-1}(Y) = \emptyset]$.

м) $(\forall X \subseteq A)(\forall Y \subseteq B)[f(X) \subseteq Y \ \leftrightarrow \ X \subseteq f^{-1}(Y)]$.