

# ЗАДАЧИ ПО БУЛЕВИ ФУНКЦИИ.

## Съдържание

<b>1</b>	<b>Теоретична основа</b>	<b>1</b>
1.1	Дефиниция на “булева функция”	1
1.2	Булеви вектори	1
1.3	Променливи	2
1.4	Композиция	3
1.5	Обобщена конюнкция и обобщена дизюнкция	3
1.6	Представяния на булеви функции	4
1.6.1	Представяне чрез вектор (канонично представяне)	4
1.6.2	Представяне чрез схеми от функционални елементи	5
1.6.3	Представяне чрез хиперкуб	8
1.6.4	Представяне чрез формули	13
1.7	Пълнота на множества от булеви функции	15
1.8	Съвършена дизюнктивна нормална форма на булева функция	15
1.9	Съвършена конюнктивна нормална форма на булева функция	17
1.10	Разни	18
<b>2</b>	<b>Задачи</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>Благодарности</b>	<b>36</b>

## 1 Теоретична основа

### 1.1 Дефиниция на “булева функция”

$J_2 \stackrel{\text{деф}}{=} \{0, 1\}$ .  $J_2^n \stackrel{\text{деф}}{=} \underbrace{J_2 \times J_2 \times \cdots \times J_2}_n$ . Булева функция на  $n$  променливи е всяка функция  $f: J_2^n \rightarrow J_2$  за някое  $n \geq 1$ .

Можем да дефинираме и булеви функции на 0 променливи. 0-кратното декартово произведение е  $\{()\}$ , следователно домейнът е едноелементен и има точно две булеви функции на 0 променливи, които булеви функции отъждествяваме с двете булеви константи 0 и 1.

Множеството от всички булеви функции на  $n$  променливи е  $\mathcal{F}_2^n$ . Множеството от всички булеви функции е

$$\mathcal{F}_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_2^n$$

### 1.2 Булеви вектори

Елементите на  $J_2^n$  са *булевите вектори с дължина  $n$* . За краткост изпускаме прилагателното “булеви” (понеже не разглеждаме други вектори) и казваме просто “ $n$ -вектори” или дори само “вектори”, ако броят на елементите е без значение. Ползваме удобната конвенция имената на векторите да бъдат записвани с удебелени букви (в полиграфията се казва “получерен

шрифт”, на английски е *boldface*), например **b**. Ако сме дефинирали някакво име на  $n$ -вектор, да кажем **b**, то неговите елементи именуваме със същото име, само че тях изписваме с нормално дебели букви (*regular face*), например  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ . За удобство може да запишем това и като  $\mathbf{b} = b_1 b_2 \dots b_n$ .

Нека  $x, y \in J_2$ .  $x \stackrel{\text{деф}}{=} \bar{y}$  тстк

$$x = \begin{cases} 1, & \text{ако } y = 0 \\ 0, & \text{ако } y = 1 \end{cases}$$

*Противоположни вектори* са вектори с една и съща дължина, които се различават във всеки елемент. Например, ако **a** и **b** са  $n$ -вектори, те са противоположни, ако

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}: a_i = \bar{b}_i$$

Факта, че **a** и **b** са противоположни, записваме накратко така:  $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{b}}$ . Добре известно е, че  $\overline{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}$ , така че  $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{b}} \leftrightarrow \bar{\mathbf{a}} = \bar{\bar{\mathbf{b}}} = \mathbf{b}$ .

### 1.3 Променливи

Нека  $f$  е булева функция на  $n$  променливи. За какви променливи става дума? Всяка булева променлива се асоциира с точно едно от множествата  $J_2$  от домейна  $\underbrace{J_2 \times J_2 \times \dots \times J_2}_{n \text{ множителя}}$ . Иначе

казано, домейнът е множество от вектори,  $2^n$  на брой, и всяка от  $n$ -те позиции в тези вектори е (по-точно, се асоциира с) булева променлива – тя може да взема стойности 0 или 1 независимо от стойностите на другите позиции. Имената на променливите обикновено записваме с  $x_1, x_2$  и така нататък, а факта, че  $f$  е функция на  $n$  променливи, записваме по познатия начин:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Ако е даден запис “ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ”, ние заключаваме, че става дума за функция точно на  $n$  променливи не от това, че има  $n$  позиции, на които са написани имена на променливи, а от това, че имената на променливи са **две по две различни**. Ако има повтаряне на имена на променливи, което е допустимо, то казваме, че сме *идентифицирали* променливите, които имат едно и също име. В такъв случай, функцията е на по-малко променливи. Например, ако е даден запис “ $f(x_1, x_2, x_1, x_1, x_1)$ ”, то става дума за функция на две променливи, а не за функция на пет променливи (колкото са позициите около запетайте в скобите). В този случай казваме, че сме идентифицирали първата, третата, четвъртата и петата променлива.

Имената, които даваме на променливите, **нямат значение**. Няма значение дали пишем  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  или  $f(x, y, z, u, v)$  или  $f(a_{10}, b_{15}, a_{30}, b_{31}, a_2)$  – това са различни записи на **една и съща** булева функция<sup>†</sup>. Обаче, ако започнем да идентифицираме променливи като например в  $f(x_1, x_2, x_1, x_1, x_1)$ , то това в общия случай е **друга** булева функция.

Променливата  $x_i$  се нарича *фиктивна*, ако

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$$

за **всяка стойност** на  $(n - 1)$ -вектора  $x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} x_{i+2} \dots x_n$ . Променлива, която не е фиктивна, се нарича *съществена*.

<sup>†</sup>При условие, че  $f$  е дадена булева функция на пет променливи и че всички символи, които сме използвали в скобите, са имена на булеви променливи.

## 1.4 Композиция

Нека  $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$  и  $g(y_1, y_2, \dots, y_m)$  са булеви<sup>†</sup> функции. *Композицията на  $g$  на мястото на  $x_i$  във  $f$  е функцията  $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, g(y_1, y_2, \dots, y_m), x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$ .* Това е функция, която е **различна** (в общия случай) и от  $f$ , и от  $g$ . Ако се интересуваме от изчисляването на тази функция, процедура за нейното изчисляване може да се получи от процедури за изчисляването на  $f$  и на  $g$ .

Колко са променливите на функцията-композиция? Очевидно множеството от променливите на функцията-композиция е  $(\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}) \cup \{y_1, \dots, y_m\}$ . Ако е изпълнено  $(\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}) \cap \{y_1, \dots, y_m\} = \emptyset^{\ddagger}$ , то композицията е функция на  $n + m - 1$  променливи. Например, ако са дадени  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  и  $g(x_6, x_7, x_8)$ , то композицията  $f(x_1, x_2, x_3, g(x_6, x_7, x_8), x_5)$  е функция на  $5 + 3 - 1 = 7$  променливи. Възможно е обаче  $(\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}) \cap \{y_1, \dots, y_m\} \neq \emptyset$ . В такъв случай броят се получава чрез комбинаторния принцип на включването и изключването: от сумата от мощностите вадим мощността на сечението и вадим още една единица заради  $x_i$ . Например, ако са дадени  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  и  $g(x_1, x_2, x_8)$ , то композицията  $f(x_1, x_2, x_3, g(x_1, x_2, x_8), x_5)$  е функция на  $(5 + 3) - 2 - 1 = 5$  променливи.

Ако  $g_1, g_2, \dots, g_n$  са булеви функции съответно на  $m_1, \dots, m_n$  променливи, а именно

$$\begin{aligned} &g_1(y_{1,1}, \dots, y_{1,m_1}) \\ &g_2(y_{2,1}, \dots, y_{2,m_2}) \\ &\dots \\ &g_n(y_{n,1}, \dots, y_{n,m_n}) \end{aligned}$$

то композицията на  $g_1$  на мястото на  $x_1$ , на  $g_2$  на мястото на  $x_2, \dots$ , на  $g_n$  на мястото на  $x_n$  е булевата функция:

$$f(g_1(y_{1,1}, \dots, y_{1,m_1}), g_2(y_{2,1}, \dots, y_{2,m_2}), \dots, g_n(y_{n,1}, \dots, y_{n,m_n}))$$

## 1.5 Обобщена конюнкция и обобщена дизюнкция

Нека  $f_1$  е булевата функция конюнкция. Нека  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  са булеви променливи. Всеки от следните записи:

$$f_1(x_1, x_2) \quad f_1(x_1, x_3) \quad f_1(x_1, x_4) \quad f_1(x_2, x_3) \quad f_1(x_2, x_4) \quad f_1(x_3, x_4)$$

е допустим. От друга страна, следните записи:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) \quad f_1(x_2, x_3, x_4) \quad f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

са, от формална гледна точка, **недопустими**, понеже конюнкцията е функция на точно **две** променливи, а не на повече.

На практика обаче ние говорим за конюнкция на много променливи. Как става това? Ако трябва да сме напълно прецизни, конюнкцията на повече от две променливи не е функцията  $f_1$ , а друга функция, която се получава от  $f_1$  чрез подходяща серия от композиции. Като

<sup>†</sup> Не е необходимо тези  $f$  и  $g$  да са **булеви** функции, за да може да говорим за композиция. Композиция на функцията  $g$  на мястото на  $x_i$  във функцията  $f$  е мислима дори когато  $f$  и  $g$  са произволни функции при условие, че кодомейнът на  $g$  е същият като  $i$ -ия домейн на  $f$ . Казано на програмистки жаргон, при условие, че типът на изхода на  $g$  е същият като типа на  $i$ -ия вход на  $f$ .

<sup>‡</sup> С други думи, ако променливите на  $f$  без  $x_i$ , от една страна, и променливите на  $g$ , от друга страна, нямат общи елементи.

пример да разгледаме следните пет функции:

$$\begin{aligned} f_1(f_1(f_1(x_1, x_2), x_3), x_4) & \qquad f_1(x_1, f_1(x_2, f_1(x_3, x_4))) \\ f_1(f_1(x_1, x_2), f_1(x_3, x_4)) & \\ f_1(f_1(x_1, f_1(x_2, x_3)), x_4) & \qquad f_1(x_1, f_1(f_1(x_2, x_3), x_4)) \end{aligned} \quad (1)$$

Всяка от тези пет функции е функция на четирите променливи  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  и  $x_4$ . Лесно се вижда, че тези функции отговарят биективно на петте<sup>†</sup> начина за групиране на променливите. Прочее, тези пет функции са равни—по-прецизно казано, (1) съдържа пет записа на една и съща функция—поради асоциативността на конюнкцията. Лесно се вижда освен това, че и всяка друга линейна наредба на променливите, да кажем  $x_2x_4x_1x_3$  би довела до същото — функцията на четири променливи си остава същата; това пък е заради комутативността на конюнкцията.

И така, функцията от (1) е пример за *обобщена конюнкция*. Това ще рече, функция на две или повече променливи, която се получава от обикновената конюнкция чрез серия от композиции. Очевидно, обобщената конюнкция има стойност единица тстк всичките ѝ променливи са единици.

Напълно аналогично дефинираме и *обобщена дизюнкция*: функция на две или повече променливи, която се получава от обикновената дизюнкция чрез серия от композиции; тя има стойност единица тстк поне една от променливите ѝ е единица.

## 1.6 Представяния на булеви функции

### 1.6.1 Представяне чрез вектор (канонично представяне)

По дефиниция, всяка булева функция на  $n$  променливи е множество от наредени двойки,  $2^n$  на брой, първият елемент от които е  $n$ -вектор, а вторият, булева стойност (0 или 1). Въпросните  $n$ -вектори са *входните вектори*. Това име има смисъл, ако си представяме булевата функция като алгоритъм, който по даден вход ( $n$ -вектор) връща булева стойност.

Ето пример за булева функция на 3 променливи:

$$f = \{((0, 0, 0), 0), ((0, 0, 1), 1), ((0, 1, 0), 1), ((0, 1, 1), 0), ((1, 0, 0), 1), ((1, 0, 1), 0), ((1, 1, 0), 0), ((1, 1, 1), 1)\}$$

Можем да опишем тази функция много по-прегледно с таблица:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

<sup>†</sup>Странична забележка: в комбинаториката,  $n$ -тото число на Catalan, което записваме като  $C_n$ , е броят на всички начини дадена линейна наредба на  $n + 1$  елемента, взети от някакво множество  $A$ , да бъде скобувана така, че дадена бинарна операция над  $A$  да бъде приложена над въпросната линейна наредба. В конкретния пример, множеството  $A$  е  $\{0, 1\}$ , броят на обектите е 4, бинарната операция е  $f_1$ , а линейната наредба е  $x_1x_2x_3x_4$ . Действително,  $C_3 = 5$ , което точно отговаря на броя на функциите в (1).

В таблицата са дадени имена на променливите, което не е необходимо, за да определим функцията. Нещо повече. Ако се разберем, че 3-векторите са подредени отгоре надолу лексикографски, както е в случая, не е необходимо да ги пишем, за да определим функцията. Бихме могли да я определим само чрез колоната от нейните стойности (в случая 8 на брой):

f
0
1
1
0
1
0
0
1

За да пестим място при писането, записваме функцията не като колона, а хоризонтално:

$$f = 01101001$$

Това е *каноничното представяне* на булева функция: вектор от  $2^n$  на брой булеви стойности, с имплицитното допускане, че входните вектори са подредени лексикографски. Ако се опитаме да определим функцията чрез вектор, чиято дължина **не** е точна степен на двойката, например

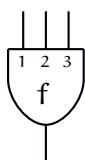
$$g = 010110$$

то това представяне е **невалидно**, тоест не задава никаква булева функция.

### 1.6.2 Представяне чрез схеми от функционални елементи

Да допуснем, че са ни дадени устройства, всяко от които има нула или повече входове и точно един изход. На входовете се подават булеви стойности. **За всяка** комбинация от булеви стойности на входовете, на изхода “излиза” булева стойност, еднозначно определена от това, което е подадено на входовете. Входовете са именувани, тоест всеки вход си има идентичност. Ако броят на входовете е  $n$ , то всяко такова устройство реализира някаква булева функция на  $n$  променливи, като всеки вход се смята за една булева променлива. Всяко такова устройство наричаме *функционален елемент*<sup>†</sup>. За целите на този курс ние разглеждаме само идеализирани функционални елементи, но такива функционални елементи може да бъдат реализирани физически, което е в основата на цифровата схемотехника.

Ще изобразяваме функционалните елементи примерно така:



Елементът се рисува с нещо като полукръг, като входовете, в случая те са три на брой и са номерирани с 1, 2 и 3, са откъм правата част, а изходът, който **винаги** е точно един, е

<sup>†</sup>На английски терминът е *gate*.

от заоблената част. Името на функцията е написано върху елемента. Естествено, функцията трябва да е такава, че броят на променливите ѝ да е точно равен на броя на входовете на елемента. Ако се разберем, че входовете са номерирани отляво надясно, можем спокойно да изпускаме изписването на номерата им; в такъв случай същият функционален елемент би бил нарисуван така:



Да допуснем, че  $f$  е следната функция:

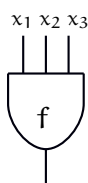
$$f = 01101001$$

Тогава върху входния вектор 001,  $f$  има стойност 1. Това изобразяваме ето така:



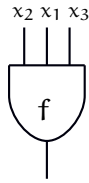
Очевидно допускаме, че има посока на “движение на информацията”, която е винаги от входовете към изхода.

Булевите функции, които разглеждаме, са над някакво множество от булеви променливи. Когато разглеждаме схеми от функционални елементи, отговарящи на някакви булеви функции, удобно е да си представяме, че променливите “текат” по “жиците”<sup>†</sup>, които влизат във входовете на функционалните елементи. Например, ако искаме да изобразим функционален елемент, съответстващ на  $f(x_1, x_2, x_3)$ , правим такава диаграма:

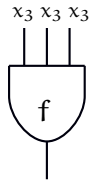


Подчертаваме, че следното свързване на входовете на функционалния елемент към трите променливи е **съществено различно**:

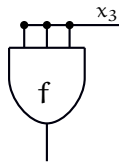
<sup>†</sup> Реалните функционални елементи са електронни устройства, по чиито жици текат токове и има напрежения, като напреженията се **интерпретират** като нули или единици. Идеализираните функционални елементи, които разглеждаме тук, са абстракции и при тях за токове и напрежения не става дума. Върху техните “жици” “текат” нули и единици. При реалните функционални елементи имат някакви закъснения—в природата нищо не се случва мигновено—така че при всяка промяна на входовете е необходимо някакво време, типично от порядъка на наносекунди или пикосекунди при модерните върхови цифрови електронни схеми. Идеализираните функционални елементи, които разглеждаме тук, нямат закъснения и при тях сигналите се разпространяват неограничено бързо.



по същите причини, поради които  $f(x_1, x_2, x_3)$  в общия случай е различна функция от  $f(x_2, x_1, x_3)$ <sup>†</sup>. Възможно е на повече от един входове на функционалния елемент да се подава една и съща входна променлива. Например:



Това отговаря на  $f(x_3, x_3, x_3)$ . Подчертаваме, че това е функция на **една променлива**, а не на три променливи. Същата ситуация можем да илюстрираме и със следната диаграма:



Тук се вижда по-ясно, че променливата е само една. Трите черни точки подчертават, че хоризонталната “жица”, по която “тече”  $x_3$ , е свързана с всяка от трите вертикални жици, които са входовете на функционалния елемент<sup>‡</sup>. Тази фигура илюстрира добре понятието “идентифициране на променливите на булева функция”, което въведохме на стр. 2. Сами съобразете, че щом  $f = 01101001$ , то  $f(x_3, x_3, x_3)$  всъщност е функцията идентитет- $x_3$ .

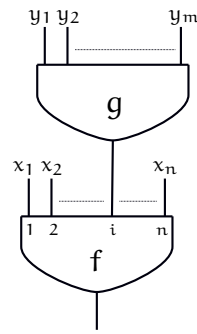
Използвайки каскадно свързани функционални елементи можем много елегантно да илюстрираме композицията на функция на мястото на променлива на друга функция. Както в Подсекция 1.4, нека  $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$  и  $g(y_1, y_2, \dots, y_m)$  са булеви функции. Съответните им функционални елементи си представяме така:



Тогава композицията на  $g$  на мястото на  $x_i$  във  $f$  се описва, в термините на функционалните елементи, като свързване на изхода на елемента на  $g$  към  $i$ -ия вход на елемента на  $f$ :

<sup>†</sup>В някои случаи тези функции може да съвпадат. Вижте Подсекция 1.10.

<sup>‡</sup>Ако използваме електротехническа терминология, можем да кажем, че всички входове на функционалния елемент са дадени “на късо” и по тях “тече”  $x_3$ .

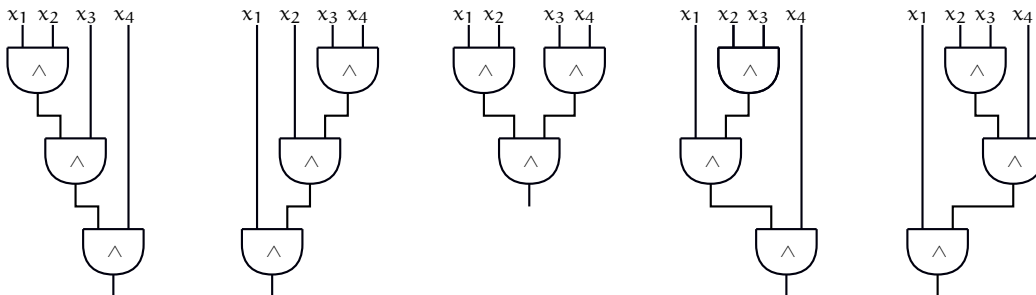


$i$ -ият вход продължава да съществува, но вече не е именуван с “ $x_i$ ”, защото променлива  $x_i$  вече няма в смисъл, че не се ползва. Активните променливи, с други думи, тези, които се ползват, са  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ . Тази каскада от функционални елементи реализира функцията  $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, g(y_1, y_2, \dots, y_m), x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$ .

Функциите обобщена конюнкция и обобщена дизюнкция, за които стана дума в Подсекция 1.5, може да се илюстрират чрез каскадни свързвания на функционални елементи тип конюнкция или дизюнкция. Нека ето този функционален елемент реализира булевата функция конюнкция:



Тогава петте композиции от (1) могат да бъдат представени така:



Както се каза в Подсекция 1.5, поради асоциативността на конюнкцията, петте композиции от (1) са всъщност пет начина да бъде написана една и съща функция. Следователно, петте различни свързвания на функционални елементи от последната фигура реализират една и съща функция, а именно обобщена конюнкция на четири променливи.

### 1.6.3 Представяне чрез хиперкуб

Понякога е много удобно да мислим за булевите функции на  $n$  променливи в термините на *хиперкуб*.  $n$ -мерен хиперкуб е обобщение на редицата от геометрични обекти *точка*, *отсечка*, *квадрат*, *куб* и така нататък:



- точката е 0-мерен хиперкуб, който е атомарен в смисъл, че няма структура,
- отсечката е 1-мерен хиперкуб, състоящ се от 2 точки и едномерния обект, който ги свързва—можем да кажем, в някакъв смисъл, “който е ограден от тях”,
- квадратът е 2-мерен хиперкуб, състоящ се от 4 точки, 4 отсечки и двумерния обект, ограден от тях,
- кубът е 3-мерен хиперкуб, състоящ се от 8 точки, 12 околни ръба, 6 квадрата и тримерния обект, ограден от тях,
- и така нататък.

От тази гледна точка,  $n$ -мерният хиперкуб е общият член на тази редица. Той е геометричен обект в  $n$ -мерното пространство. Може да мислим за хиперкуба като за обект, състоящ се от:

- $2^n$  точки, които са върховете му,
- $n2^{n-1}$  отсечки, които са околните му ръбове,
- $\binom{n}{2}2^{n-2}$  квадрата, които са околните му стени,
- $\binom{n}{3}2^{n-3}$  куба,
- и така нататък
- $\binom{n}{n-1}2^{n-(n-1)} = 2n$  на брой,  $(n-1)$ -мерни обекта,
- един  $n$ -мерен обект, ограден от  $(n-1)$ -мерните обекти.

Лесно се вижда, че  $k$ -мерните компоненти на  $n$ -мерния хиперкуб са  $\binom{n}{k}2^{n-k}$  на брой.

Може да пренебрегнем геометричния аспект на хиперкуба и да мислим за него като за чисто комбинаторен обект по следния начин:

- Върховете му са векторите от  $J_2^n$ . Това са 0-мерните компоненти на  $n$ -мерния хиперкуб.
- Два вектора са *съседни* тогава и само тогава, когато се различават в точно една позиция. Например, ако  $n = 3$ , векторите 001 и 011 се различават в точно една позиция (втората) и те задават един околел ръб на 3-мерния хиперкуб. И така, всеки околел ръб се идентифицира с двата върха, които му притадлежат, а те се различават в точно една позиция. С други думи, 1-мерните компоненти са всички (ненаредени) двойки вектори, които се различават в точно една позиция.
- Аналогично, всяка околел стена се идентифицира с четирите върха, които ѝ принадлежат. С други думи, 2-мерните компоненти са всички (ненаредени) четворки вектори, такива че има точно две позиции, в които тези четири вектора се различават.
- Аналогично, 3-мерните компоненти са всички (ненаредени) осморки вектори, такива че има точно три позиции, в които се различават.
- И така нататък.
- $n$ -мерната компонента е точно една: това е множеството от всички,  $2^n$  на брой,  $n$ -вектори.

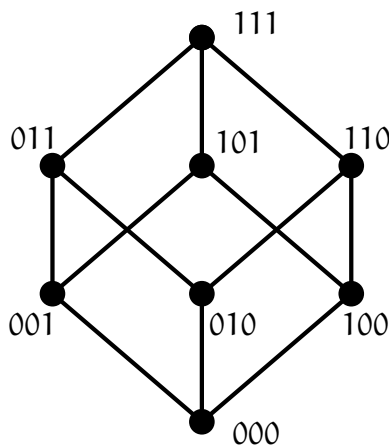
Тогава общият брой компоненти на  $n$ -мерния хиперкуб е:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} 2^{n-k} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{n-k} 2^{n-k} = \\ &= \sum_{0 \geq -k \geq -n} \binom{n}{n-k} 2^{n-k} = \sum_{n \geq n-k \geq 0} \binom{n}{n-k} 2^{n-k} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = 3^n \end{aligned}$$

Като пример да разгледаме 3-мерния хиперкуб, записан **напълно подробно**:

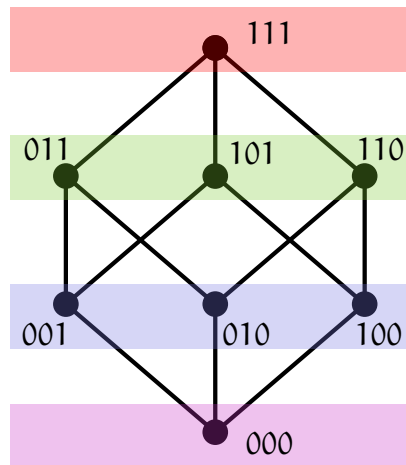
$$\left\{ \begin{aligned} &\{000\}, \{001\}, \{010\}, \{011\}, \{100\}, \{101\}, \{110\}, \{111\}, \quad //8 \text{ върха} \\ &\{000, 100\}, \{000, 010\}, \{010, 011\}, \{001, 011\}, \{000, 100\}, \{001, 101\}, \\ &\quad \{011, 111\}, \{010, 110\}, \{100, 101\}, \{101, 111\}, \{111, 110\}, \{110, 100\} \quad //12 \text{ рѐба} \\ &\{000, 001, 011, 010\}, \{000, 100, 101, 001\}, \{001, 101, 111, 011\}, \\ &\quad \{010, 110, 100, 000\}, \{010, 110, 111, 011\}, \{100, 101, 111, 110\}, \quad //6 \text{ стени} \\ &\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\} \quad //1 \text{ обем} \end{aligned} \right\}$$

Обикновено хиперкубът се рисува като граф: само върховете и страните. Това означава, че 0-мерните и 1-мерните компоненти се изобразяват, а останалите, не. Така е много по-прегледно. Но ние знаем, че хиперкубът като комбинаторен обект е съвкупност от обектите от всички размерности, от 0 до  $n$ <sup>†</sup>. Ето типично изображение на 3-мерния хиперкуб:

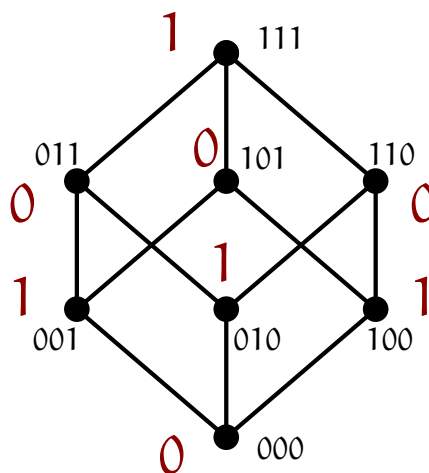


Върховете на  $n$ -мерния хиперкуб се разбиват на  $n + 1$  *слоя*. Върховете от един слой са точно тези вектори, които имат един и същи брой единици. Броят на единиците може да е  $0, 1, \dots, n$ , затова и слоевете са  $n + 1$ . Когато говорим за слой  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , имаме предвид слоя от векторите, всеки от които има точно  $k$  единици. Очевидно слой  $k$  има  $\binom{n}{k}$  вектора в себе си. Ето същия хиперкуб, като четирите слоя са указани с различни цветове:

<sup>†</sup> Ако говорим за *граф-хиперкуб*, тогава имаме предвид обекта, който е съвкупност само от 0-мерните компоненти (върховете) и 1-мерните компоненти, които в този контекст наричаме “ребра”.  $n$ -мерен граф-хиперкуб не е същото нещо като  $n$ -мерен хиперкуб: графът-хиперкуб е подмножество на хиперкуба. Хиперкубът съдържа и компонентите от размерности  $\geq 2$ .



Всяка булева функция на  $n$  променливи може да бъде разглеждана като асоцииране на всеки връх на  $n$ -мерния хиперкуб (помним, че върховете му са точно  $n$ -векторите) с една булева стойност. Например, функцията  $f = 01101001$  от миналата подсекция се изобразява върху хиперкуба така:



Стойностите на функцията върху векторите са написани с червено.

От казаното дотук изглежда, че каноничното представяне на дадена булева функция и представянето чрез хиперкуб са едно и също нещо. Всъщност, разлика има и тя е само в наредбата на векторите. При каноничното представяне, векторите са наредени лексикографски<sup>†</sup>, а при представянето с хиперкуб те са наредени от частичната наредба  $\preceq \subseteq J_2^n \times J_2^n$ , дефинирана по следния начин:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in J_2^n : \mathbf{a} \preceq \mathbf{b} \leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : a_i \leq b_i) \tag{2}$$

<sup>†</sup>Лексикографската наредба е линейна.

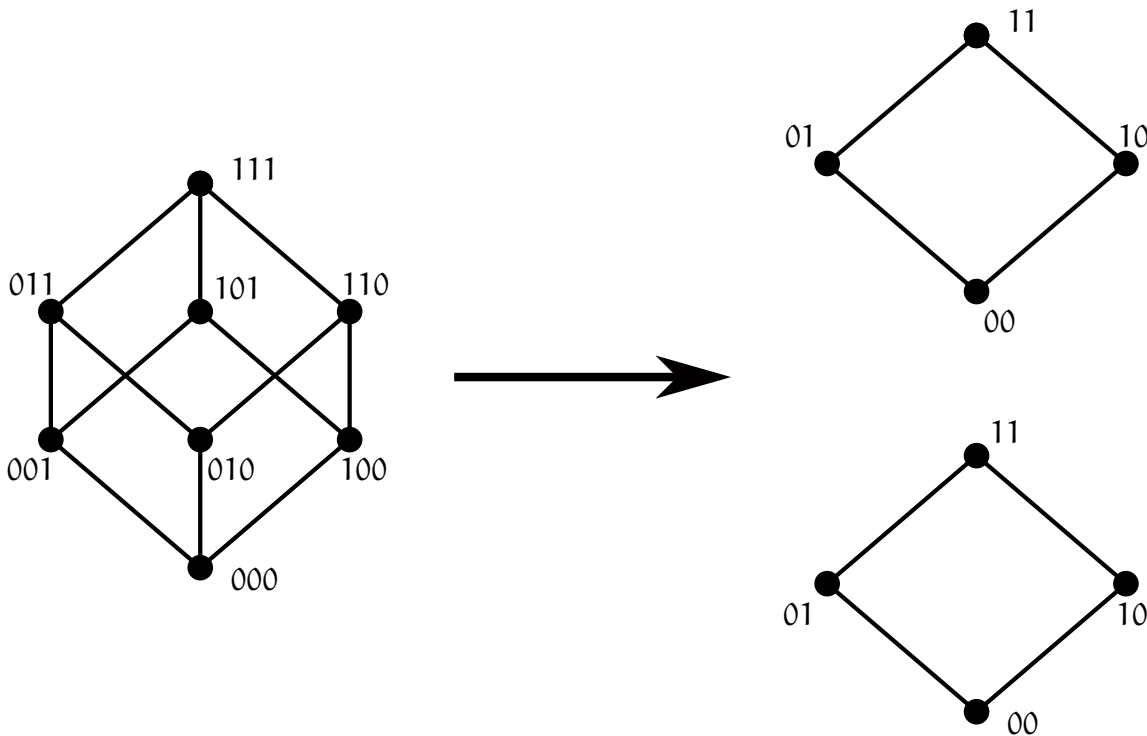
Това е частична наредба, която не е линейна, понеже има двойки вектори, които не са сравними (спрямо нея), например 011 и 100. Тази частична наредба е полезна за осмислянето на различни понятия и решаването на много задачи от областта на булевите функции. На горния пример всъщност е показана диаграмата на Hasse на частичната наредба  $\preceq$  върху 3-векторите.

Както казахме вече, съседни вектори са такива, които се различават в точно една позиция<sup>†</sup>. Съседството на вектори може да осмислим и в термините на хиперкуба: два негови вектора са съседни, ако са в съседни слоеве. Съседство на вектори може да осмислим и чрез релацията  $\preceq$  (виж (2)). А именно, ако  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  са  $n$ -вектори, то те са съседни тогава и само тогава, когато  $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$  или  $\mathbf{b} \prec \mathbf{a}$ , където релацията  $\prec$  се дефинира така:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in J_2^n : \mathbf{a} \prec \mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{a} \preceq \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \wedge \neg \exists \mathbf{c} (\mathbf{a} \preceq \mathbf{c} \preceq \mathbf{b}) \quad (3)$$

Например, 0010  $\prec$  0011 и 0010  $\prec$  1010, но 0010  $\not\prec$  1111, въпреки че 0010  $\preceq$  1111.

Срязване на  $n$ -мерния хиперкуб в  $i$ -тата дименсия е понятие, което първо ще онагледим с пример. Ето срязване на 3-мерния хиперкуб във втората дименсия:



За удобство, нека да мислим за хиперкуба като за граф-хиперкуб, тоест съвкупност от върхове и ребра. Срязването се състои в премахване на  $i$ -тата позиция на всички вектори-върхове, след което тяхната дължина става  $n - 1$ , и премахването на точно тези ребра, които са от вида:

$$\{\alpha 0 \beta, \alpha 1 \beta\}$$

където  $\alpha$  е булев вектор с дължина  $i - 1$ , а  $\beta$  е булев вектор с дължина  $n - i$ . В примера със срязването на 3-мерния хиперкуб във втората дименсия, ребрата, които махаме, са точно

$$\{000, 010\}, \{001, 011\}, \{100, 110\}, \{101, 111\}$$

<sup>†</sup> Освен това, за да говорим за съседство на вектори, трябва те да имат една и съща дължина. При вектори с различни дължини за съседство не може да става дума.

Ако гледаме на хиперкуба не като на граф, а като на “истински” хиперкуб с компоненти от всички възможни размерности, ясно е, че срязването води до изчезването на  $n$ -мерната компонента, както и до намаляването на броя на  $k$ -мерните компоненти от  $\binom{n}{k}2^{n-k}$  на  $\binom{n-1}{k}2^{n-k-1}$ , тъй като резултатът от срязването е появата на два нови хиперкуба, всеки с размерност  $n-1$ .

От казаното досега може да не е ясно защо настояваме да се казва, че срязваме именно в  $i$ -тата размерност. Например, на последната фигура от един куб се получават два квадрата и по нищо не личи точно в коя от трите размерности е бил срян куба. Отговорът на тази забележка е, че хиперкубът ни интересува в контекста на булевите функции, когато върховете му са “маркирани” с нули или единици – стойностите на булевата функция. При срязването асоциацията между върхове и стойности на функцията **се запазва**, така че в общия случай резултатът от срязването в различни размерности е **различен**.

#### 1.6.4 Представяне чрез формули

*Формула* е чисто синтактично понятие. Средношколското разбиране за “формула” е “прост алгоритъм”, например “формулата за лицето на кръг с радиус  $r$  е  $S = \pi r^2$ ”. Тук ние възприемаме съвсем друго разбиране за “формула”. Формула е всеки стринг, конструиран над дадена азбука съгласно дадени правила. Етимологията на думата е следната: на латински “formula” е умалително от “forma”. Не е грешка да казваме “форма” вместо “формула”.

Формулите на булевите функции може да се дефинират индуктивно по следния начин. Да фиксираме изброимо безкрайно множество от булеви променливи  $\{x_0, x_1, \dots\}$ . Нека  $\Sigma$  е азбуката:

$$\Sigma = \{f, x, 0, 1, \dots, 9, (, ), ,\}$$

С червено са записани буквите от езика, който ще опишем, а именно езика от формулите на булевите функции, а с черно са буквите от метаезика, който използваме, за да опишем езика от формулите на булевите функции. Нека  $\Sigma_d = \{0, 1, \dots, 9\}$ . Нека  $\tilde{\Sigma}$  е множеството от стрингове над  $\Sigma_d$ , които са валидни записи<sup>†</sup> на числа в десетична позиционна бройна система. Нека  $\iota$  е стандартната десетична позиционна бройна система, тоест биекцията

$$\iota : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{N}$$

която знаем от училище. Нека  $t$  е произволно изброяване на всички булеви функции, тоест биекция  $t : \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathbb{N}$ . За удобство можем да вземем най-простото и естествено изброяване на булевите функции:

- за всяко  $n \in \mathbb{N}$ , ако  $f \in \mathcal{F}_2^n$  и  $g \in \mathcal{F}_2^{n+1}$ , то  $t(f) < t(g)$ ,
- за всяко  $n \in \mathbb{N}$ , ако  $f, g \in \mathcal{F}_2^n$  и  $f \neq g$ , то  $t(f) < t(g)$  тогава и само тогава, когато каноничното представяне на  $f$  предхожда лексикографски каноничното представяне на  $g$ .

Нека изброените от  $t$  булеви функции са  $f_0, f_1$  и така нататък. Да разгледаме началото на изброяването.  $f_0$  е константа нула на нула променливи, тоест  $(0)$ .  $f_1$  е константа единица на нула променливи, тоест  $(1)$ .  $f_2$  е константа нула на една променлива, тоест  $(0, 0)$ .  $f_3, f_4$  и  $f_5$  са съответно  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  и  $(1, 1)$ .  $f_6$  е константа нула на две променливи, тоест  $(0, 0, 0, 0)$ . И така нататък.  $f_{21}$  е константа единица на две променливи, тоест  $(1, 1, 1, 1)$ .  $f_{22}$  е константа нула на три променливи, тоест  $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . И така нататък.  $f_{277}$  е константа единица на три променливи, тоест  $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ .  $f_{278}$  е константа нула на четири променливи, тоест

<sup>†</sup>Например 0017 не е валиден запис заради двете водещи нули.

$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . И така нататък.  $f_{65813}$  е константа единица на четири променливи, тоест  $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ .  $f_{65813}$  е константа нула на пет променливи. И така нататък.

Тук функциите нарочно са написани със скоби и запетаи, за да е ясно, че са вектори. Примерно,  $(0)$  е различен обект от  $0$ —първото е булева функция, второто е булева стойност—и този по-неикономичен запис ги различава веднага.

Тогава дефинираме “формула на булева функция” чрез следната индуктивна дефиниция.

**Определение 1** (Формули на булевите функции). Всеки стринг  $\phi \in \Sigma^+$  е *формула на булева функция* тогава и само тогава, когато в сила е точно едно от двете:

- **База.**  $\phi = x\alpha$ , където  $\alpha \in \tilde{\Sigma}$
- **Индуктивна стъпка.**  $\phi = f\alpha(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  където  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  са формули на булеви функции,  $\alpha \in \tilde{\Sigma}$  и  $t^{-1}(i(\alpha))$  има точно  $n$  променливи<sup>†</sup>. Последното е важно! Забележете, че  $f999999(x1, x2)$  е синтактично невалиден запис, защото булевата функция номер деветстотин деведетдесет и девет хиляди деветстотин деведесет и девет е с пет променливи съгласно номерацията  $t$ .

Въвеждаме и функцията  $\nu$ , която се нарича *дълбочина на формулата*:

- В базовия случай,  $\nu(\phi) \stackrel{\text{деф}}{=} 0$ .
- В индуктивната стъпка,  $\nu(\phi) \stackrel{\text{деф}}{=} \max\{\nu(\phi_1), \nu(\phi_2), \dots, \nu(\phi_n)\} + 1$

Неформално, ако си представим съответна реализация чрез функционални елементи, то дълбочината на схемата е максималният брой функционални елементи, през които трябва да премине сигналът.  $\square$

Това дали дефинираме  $x\alpha$ —запис на номерирана променлива—като формула или не, е въпрос на наш избор. Ако не желаем това, може да усложним Определение 1 или, което е по-просто решение, да дефинираме допълнително, че *истинска формула на булева функция* е всяка формула с дълбочина поне единица.

Дотук сме дефинирали, чисто синтактично, формулите на булевите функции. Не сме казали нищо за техния смисъл, или, иначе казано, за тяхната *семантика*. Семантиката можем да дефинираме, използвайки индуктивната дефиниция на синтаксиса, като аналогът на синтактичната операция “вмъкване на стринг на мястото на подстринг” (има се предвид вмъкването на формулите  $\phi_i$  на местата на имената на променливите) е семантичната “композиция на функция на мястото на променлива в друга функция”. И така:

- семантиката на всяка формула с дълбочина нула  $x\alpha$  е булевата променлива  $x_{i(\alpha)}$ .
- семантиката на всяка формула с дълбочина единица  $f\alpha(x\beta_1, x\beta_2, \dots, x\beta_n)$ , където  $\beta_i \in \tilde{\Sigma}$  за  $1 \leq i \leq n$ , е булевата функция  $f_i(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n})$ , където  $f_i = t^{-1}(i(\alpha))$  и  $x_{k_j}$  за  $1 \leq j \leq n$  е булевата променлива, чийто индекс  $k_j$  е  $i(\beta_j)$ .
- семантиката на всяка формула с дълбочина повече от единица  $\phi = f\alpha(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  е композицията на семантиките на  $\phi_1, \dots, \phi_n$  на местата на съответно първата,  $\dots$ ,  $n$ -тата променлива на функцията  $f_i$ , където  $f_i = t^{-1}(i(\alpha))$ .

<sup>†</sup>Забележете, че  $i(\alpha)$  е число, а  $t^{-1}(i(\alpha))$  е една от всички булеви функции, защото  $t^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}_2$ .

Лесно се вижда, че при изредените правила булевата функция, която е семантиката на някаква формула, е **една единствена**, но обратното не е вярно: за всяка функция има **безброй много** формули, на които тя е семантика. Ако булевата функция  $f$  е семантиката на формулата  $\phi$  ще казваме, че  $f$  *съответства на*  $\phi$ .

Често срещана задача е: дадени са две формули, да се реши дали са еквивалентни, тоест дали съответната им булева функция е една и съща, или не. Това е частен случай на общата задача: дадени са два синтактични обекта (някакви стрингове, изградени по някакви правила), да се определи дали семантиката им е една и съща, или не, като семантиката е добре дефинирана функция.

Функциите, чиито формули ще използваме най-често, са “стандартните” булеви функции на две променливи: конюнкцията, дизюнкцията, импликацията, сумата по модул 2, стрелката на Peirce и чертата на Sheffer, а така също и отрицанието, което е функция на една променлива. Има смисъл множеството от функции, чиито формули ще се ползват, да бъде пълно множество (вж. Секция 1.7).

## 1.7 Пълнота на множества от булеви функции

Нека  $F \subseteq \mathcal{F}_2$ . Неформално, множеството  $F$  е *пълно*, ако всяка булева функция  $f \in \mathcal{F}_2$  може да бъде представена като композиция на функциите от  $F$ . Формално, нека  $[F]$  означава затварянето на  $F$  спрямо композиция, като затварянето  $[F]$  може да се дефинира чрез следната индуктивна дефиниция –  $[F]$  е най-малкото множество, такова че:

- $[F]$  съдържа всички функции от  $F$ .
- Нека  $f$  е функция, която се съдържа в  $[F]$ . Нека  $f$  има  $n$  променливи за някакво  $n \geq 1$ . Нека идентифицираме някои от променливите на  $f$ . Получената функция се съдържа в  $[F]$ .
- Нека  $f$  и  $g$  са произволни функции от  $[F]$ . Нека  $f$  има  $n$  променливи за някакво  $n \geq 1$ . Тогава композицията на  $g$  на мястото на  $i$ -тата променлива на  $f$  също се съдържа в  $[F]$ , за  $1 \leq i \leq n$ .

И така,  $F$  е пълно множество, ако  $[F] = \mathcal{F}_2$ .

**Теорема 1** (теорема на Boole). Множеството от трите булеви функции конюнкция, дизюнкция и отрицание е пълно.  $\square$

## 1.8 Съвършена дизюнктивна нормална форма на булева функция

Нека са фиксирани краен брой булеви променливи  $x_1, \dots, x_n$  за  $n \geq 1$ . *Литерал* ще наричаме всяко име на променлива или всяко име на променлива с черта отгоре (отрицание). Литералите от първия вид се наричаме *положителни*, а от втория – *отрицателни*. Веднага подчертаваме, че литералите са **формули** и като такива са качествено различни от самите променливи, понеже формулите са понятия от синтактичното ниво, а променливите са от по-високото семантично ниво. Това, че използваме един и същи запис “ $x_1$ ” и за името на променлива (което е формула), и за самата променлива, не води до объркване, защото опитният читател винаги може да разбере от контекста дали става дума за синтактичното ниво или за семантичното ниво. Примери за положителни литерали са  $x_1, x_4$  и така нататък. Примери за отрицателни литерали са  $\bar{x}_1, \bar{x}_3$  и така нататък.

*Конюнктивна клауза* е всяка непразна формула, която се състои от конкатенация на литерали, такива че всяко име на променлива се появява най-много веднъж – било като

положителен, било като отрицателен литерал. Ако променливите са  $x_1, \dots, x_6$ , примери за конюнктивни клаузи са  $x_1x_3x_4$ ,  $x_1\bar{x}_4$ ,  $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ ,  $\bar{x}_3$ ,  $x_2\bar{x}_5\bar{x}_6$  и така нататък. Не е задължително, но е силно препоръчително имената да се записват отляво надясно в нарастващ ред на индексите.

*Пълна конюнктивна клауза* е конюнктивна клауза, която съдържа точно  $n$  литерала. С други думи, това е непразна формула, която се състои от конкатенация на литерали, такива че всяко име на променлива се появява точно веднъж – било като положителен, било като отрицателен литерал. Ако променливите са  $x_1, \dots, x_6$ , примери за пълни конюнктивни клаузи са  $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ ,  $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5x_6$  и така нататък. Не е задължително, но е силно препоръчително имената да се записват отляво надясно в нарастващ ред на индексите.

*Дизюнктивна нормална форма*, съкратено ДНФ, е формула, която се състои от една или повече различни<sup>†</sup> конюнктивни клаузи, свързани със символа “ $\vee$ ”. В горния контекст, примери за ДНФ са  $x_2\bar{x}_3x_4$ ,  $x_1x_4 \vee x_2\bar{x}_5\bar{x}_6 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$  и така нататък. *Съвзршена дизюнктивна нормална форма*, съкратено СъвДНФ е дизюнктивна нормална форма, в която участват само пълни конюнктивни клаузи. В горния контекст, пример за СъвДНФ е  $x_1\bar{x}_2x_3x_4x_5x_6 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6$ .

Семантиката на литералите, конюнктивните клаузи и ДНФ е очевидната:

- Семантиката на всеки положителен литерал  $x_i$  е функцията идентитет- $x_i$ . Семантиката на всеки отрицателен литерал  $\bar{x}_i$  е функцията отрицание-на- $x_i$ .
- Семантиката на всяка конюнктивна клауза  $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k$ , където  $\lambda_j$  са литерали за  $1 \leq j \leq k$ , е композицията  $f_{\text{con}}(f_1, f_2, \dots, f_k)$ , където  $f_{\text{con}}$  е обобщената конюнкция на  $k$  променливи, а  $f_j$  е семантиката на  $\lambda_j$ , за  $1 \leq j \leq k$ .
- Семантиката на всяка ДНФ  $\phi_1 \vee \phi_2 \vee \cdots \vee \phi_k$ , където  $\phi_j$  е конюнктивна клауза за  $1 \leq j \leq k$ , е  $f_{\text{dis}}(f_1, f_2, \dots, f_k)$ , където  $f_{\text{dis}}$  е обобщената дизюнкция на  $k$  променливи, а  $f_j$  е семантиката на  $\phi_j$ , за  $1 \leq j \leq k$ .

Като пример да разгледаме формулата (тя е СъвДНФ, ако  $n = 6$ )

$$\phi = x_1\bar{x}_2x_3x_4x_5x_6 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6$$

Очевидно, нейната семантика е булевата функция—да я наречем  $h$ —на шестте променливи  $x_1, \dots, x_6$ , която има стойност 1 върху векторите 000000 и 101111 и има стойност 0 върху всички останали, 62 на брой, вектори. Сега да си представим, че трябва да запишем  $h$  чрез формула, изградена съгласно индуктивното Определение 1. Естествено, има безброй начини да сторим това, но нека се опитаме да напишем формула, която е аналогична на  $\phi$ . Лесно се вижда, че ни трябва формули за функциите отрицание, конюнкция и дизюнкция. Функцията  $h$  е равна на някаква композиция от тези функции<sup>‡</sup>, а именно на дизюнкция от някакви конюнкции. Аналогът на това в синтактичния свят на формулите е: че формула за  $h$  може да бъде получена, като във формула за дизюнкция заместим стринговете-имена на променливи с някакви формули за конюнкции.

Да направим формула за  $h$  точно по Определение 1, като използваме червен цвят за буквите  $\dot{y}$ . Функциите отрицание, конюнкция и дизюнкция имат номера съответно 4, 7 и 13

<sup>†</sup>Кога две конюнктивни клаузи са различни? Ако настояваме индексите на променливите да са в нарастващ ред отляво надясно, то две конюнктивни клаузи са различни тстк са различни като стрингове. Без това ограничение, можем да дефинираме “различни формули” и в частност различни конюнктивни клаузи чрез разлика в семантиките.

<sup>‡</sup>Тази композиция не е единствена заради комутативността на дизюнкцията и конюнкцията.



в изброяването  $t$ , тоест, това са съответно  $f_4$ ,  $f_7$  и  $f_{13}$ . Ето пример за формула, съответна на  $h$ :

$$\psi = f_{13}(f_7(x_1, f_7(f_4(x_2), f_7(x_3, f_7(x_4, f_7(x_5, x_6)))))), \\ f_7(f_4(x_1), f_7(f_4(x_2), f_7(f_4(x_3), f_7(f_4(x_4), f_7(f_4(x_5), f_4(x_6)))))))$$

Очевидно  $\phi$  е несравнимо по-лека за четене от  $\psi$ , макар че са еквивалентни, имайки една и съща семантика. Може да възникне въпросът, защо изобщо ползваме тромавата конструкция на Определение 1, след като има начин да се записват еквивалентни формули, които са много по-лесни за четене. Отговорът е, че конструкцията на Определение 1 има чисто теоретично значение. Там искахме да дефинираме прецизно и кратко “формула” и “функция, съответна на формула”, а не сме имали за цел получените формули да са кратки и ясни. Говорейки за ДНФ искаме друго – кратък и много ясен запис на формулите. За тази цел е много по-удачно да се въведат литерали и конюнктивни клаузи и чрез тях и буквите “ $\vee$ ” да се дефинират ДНФ.

Доказателството на теоремата на Boole се основава на факта, че всяка булева функция на  $\geq 1$  променливи, която не е константа-нула, има една единствена СъвДНФ.

## 1.9 Съвършена конюнктивна нормална форма на булева функция

Нека са фиксирани краен брой булеви променливи  $x_1, \dots, x_n$  за  $n \geq 1$ .

*Дизюнктивна клауза* е всяка непразна формула, която се състои от литерали, свързани със символа “ $\vee$ ”, такива че всяко име на променлива се появява най-много веднъж – било като положителен, било като отрицателен литерал. Ако променливите са  $x_1, \dots, x_6$ , примери за дизюнктивни клаузи са:

$$x_1 \vee x_3 \vee x_4, \\ x_1 \vee \bar{x}_4, \\ x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6, \\ \bar{x}_3, \\ x_2 \vee \bar{x}_5 \vee \bar{x}_6$$

и така нататък. Не е задължително, но е силно препоръчително имената да се записват отляво надясно в нарастващ ред на индексите.

*Пълна дизюнктивна клауза* е дизюнктивна клауза, която съдържа точно  $n$  литерала. С други думи, това е непразна формула, която се състои от литерали, свързани със символа “ $\vee$ ”, такива че всяко име на променлива се появява точно веднъж – било като положителен, било като отрицателен литерал. Ако променливите са  $x_1, \dots, x_6$ , примери за пълни дизюнктивни клаузи са:

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6, \\ x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5 \vee x_6$$

и така нататък. Не е задължително, но е силно препоръчително имената да се записват отляво надясно в нарастващ ред на индексите.

*Конюнктивна нормална форма*, съкратено КНФ, е формула, която се състои от конкатенация на една или повече различни дизюнктивни клаузи, като, ако дизюнктивните клаузи

са повече от една, всяка от тях е оградена от чифт скоби, в противен случай скоби не се ползват. В горния контекст, примери за КНФ са:

$$x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4, \\ (x_1 \vee x_4 \vee x_2 \vee \overline{x_5})(\overline{x_6} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

и така нататък. *Съвършена конюнктивна нормална форма*, съкратено СЪВКНФ е конюнктивна нормална форма, в която участват само пълни дизюнктивни клаузи. В горния контекст, пример за СЪВКНФ е  $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_6})$ .

Семантиката на КНФ е очевидната:

- Семантиката на всеки положителен литерал  $x_i$  е функцията идентитет- $x_i$ . Семантиката на всеки отрицателен литерал  $\overline{x_i}$  е функцията отрицание-на- $x_i$ .
- Семантиката на всяка дизюнктивна клауза  $\lambda_1 \vee \lambda_2 \vee \dots \vee \lambda_k$ , където  $\lambda_j$  са литерали за  $1 \leq j \leq k$ , е композицията  $f_{\text{dis}}(f_1, f_2, \dots, f_k)$ , където  $f_{\text{dis}}$  е обобщената дизюнкция на  $k$  променливи, а  $f_j$  е семантиката на  $\lambda_j$ , за  $1 \leq j \leq k$ .
- Семантиката на всяка КНФ  $(\phi_1)(\phi_2) \dots (\phi_k)$ , където  $\phi_j$  е дизюнктивна клауза за  $1 \leq j \leq k$ , е  $f_{\text{con}}(f_1, f_2, \dots, f_k)$ , където  $f_{\text{con}}$  е обобщената конюнкция на  $k$  променливи, а  $f_j$  е семантиката на  $\phi_j$ , за  $1 \leq j \leq k$ .

## 1.10 Разни

Функция (може дори да не е булева, но типовете на променливите трябва да са едни и същи) на  $n$  променливи, да я наречем  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  се нарича *симетрична*, ако стойността ѝ се запазва при всяка пермутация на променливите. С други думи,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

за всяка пермутация  $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$  на вектора  $1, 2, \dots, n$ . Например, ако  $n = 3$ , то:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_3, x_2) = f(x_2, x_1, x_3) = f(x_2, x_3, x_1) = f(x_3, x_1, x_2) = f(x_3, x_2, x_1)$$

Ако пък  $n = 2$ , то:

$$f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$$

Очевидно комутативността е частен случай на симетричността.

## 2 Задачи

**Задача 1.** Намерете  $|\mathcal{F}_2^n|$ .

**Решение:** Добре известно е, че броят на тоталните функции с краен домейн  $X$  и краен кодомейн  $Y$  е  $|Y|^{|X|}$ . Прилагаме тази формула с  $|X| = 2^n$  и  $|Y| = 2$  и получаваме  $|\mathcal{F}_2^n| = 2^{2^n}$ .  $\square$

**Задача 2.** Нека

$$S = \{f \in \mathcal{F}_2^n \mid \forall \mathbf{w}, \mathbf{z} \in J_2^n : \mathbf{w} = \overline{\mathbf{z}} \rightarrow f(\mathbf{w}) = \overline{f(\mathbf{z})}\}$$

Намерете  $|S|$  (като функция на  $n$ , разбира се).

**Решение:** С други думи, търси се броят на булевите функции, които върху противоположни вектори имат противоположни стойности<sup>†</sup>.

Да групираме  $n$ -векторите по двойки  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , такива че  $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{b}}$ . За всяка функция  $f \in X$  и за всяка от тези двойки е изпълнено следното. Стойността на функцията върху единия елемент от двойката се определя от стойността на функцията върху другия елемент от двойката. Иначе казано, стойностите, които функцията има върху *половината* от  $n$ -векторите, я определят напълно.

Но  $n$ -векторите са  $2^n$ , така че половината от тях са  $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$  на брой. Имайки предвид това, виждаме, че броят на въпросните функции е равен на броя на всички булеви функции върху  $n - 1$  променливи. Отговорът е  $|S| = 2^{2^{n-1}}$ .  $\square$

**Задача 3.** Нека

$$X = \{f \in \mathcal{F}_2^n \mid \forall \mathbf{w}, \mathbf{z} \in J_2^n : \mathbf{w} = \bar{\mathbf{z}} \rightarrow f(\mathbf{w}) = f(\mathbf{z})\}$$

Намерете  $|X|$ .

**Решение:** В тази задача се търси броят на функциите, които имат една и съща стойност върху противоположни вектори. Отговорът е  $|X| = 2^{2^{n-1}}$  със практически същите съображения като в решението на Задача 2.  $\square$

**Задача 4.** Намерете броя на булевите функции на  $n$  променливи, които имат стойност 1 върху точно  $k$  вектора.

**Решение:** Отговорът очевидно е  $\binom{2^n}{k}$ .  $\square$

**Задача 5.** Да се намери броят на симетричните булеви функции на  $n$  променливи.

**Решение:** Съгласно определението на симетрична функция, става дума за булеви функции, които запазват стойността си при произволно размятане на стойностите на елементите на входния вектор. Входният вектор се състои от нули и единици, следователно се иска върху всички входни вектори **с един и същи брой единици**, стойността на функцията да е една и съща. С други думи, иска се върху всеки слой на хиперкуба функцията да има една и съща стойност. Слоеве на  $n$ -мерния хиперкуб са  $n + 1$ , върху всеки от тях стойността е една и съща, а стойностите върху различни слоеве са произволни една спрямо друга. Тогава отговорът е  $2^{n+1}$ .  $\square$

**Задача 6.** Кои са симетричните булеви функции на 2 променливи?

**Решение:** С други думи, кои са комутативните функции, тъй като при  $n = 2$ , свойството симетричност съвпада със свойството комутативност. Съгласно Задача 5, тези функции са  $2^{2+1} = 8$  на брой. В каноничното представяне, това са функциите

$$f_0 = 0000$$

$$f_1 = 0001$$

$$f_6 = 0110$$

$$f_7 = 0111$$

$$f_8 = 1000$$

$$f_9 = 1001$$

$$f_{14} = 1110$$

$$f_{15} = 1111$$

<sup>†</sup>Такива функции се наричат *самодвойствени* (на английски *self-dual*). Просто *двойствена* функция на  $f \in \mathcal{F}_2^n$  е единствената  $g \in \mathcal{F}_2^n$ , за която е изпълнено  $\forall \mathbf{a} \in J_2^n : g(\mathbf{a}) = f(\bar{\mathbf{a}})$ . Самодвойствените функции са тези, които са двойствени на себе си.

□

**Задача 7.** Да се определи броят на булевите функции на  $n$  променливи за  $n \geq 2$ , които запазват стойността си при размяна на променливите  $x_1$  и  $x_2$ .

**Решение:** С други думи, иска се

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n)$$

за всички възможни стойности на  $x_1, \dots, x_n$ . Решението ще получим след като съобразим колко различни входни вектори има по отношение на тази задача.

Лесно се вижда, че ако  $x_1 = x_2 = 0$  или  $x_1 = x_2 = 1$ , разместването на  $x_1$  и  $x_2$  няма значение и функцията запазва стойността си по очевидни причини при разместването на  $x_1$  и  $x_2$ . Да разбием множеството от всички входни вектори на 4 равномошни подмножества съгласно четирите възможности за подвектора  $x_1x_2$ :

$$\begin{aligned} A &= 0 \times 0 \times \underbrace{J_2 \times \dots \times J_2}_{n-2 \text{ пъти}} \\ B &= 0 \times 1 \times \underbrace{J_2 \times \dots \times J_2}_{n-2 \text{ пъти}} \\ C &= 1 \times 0 \times \underbrace{J_2 \times \dots \times J_2}_{n-2 \text{ пъти}} \\ D &= 1 \times 1 \times \underbrace{J_2 \times \dots \times J_2}_{n-2 \text{ пъти}} \end{aligned}$$

Всяко от тези множества има мощност  $2^{n-2}$ . Да разгледаме булевите функции на  $n$  променливи без ограничения. Всяка булева функция на  $n$  променливи без ограничения има  $2^{n-2}$  стойности върху векторите от  $A$ , върху векторите от  $B$ , върху векторите от  $C$  и върху векторите от  $D$ . Всички тези стойности на функцията, на брой  $4 \times 2^{n-2} = 2^n$  може да са единици или нули независимо една от друга, откъдето и броят на всички функции е  $= 2^{2^n}$ .

Ако имаме предвид ограничението от условието на задачата, виждаме, че върху всеки вектор от  $C$ , стойността на функцията трябва да съвпада със стойността ѝ върху точно един вектор от  $B$ . От друга страна, върху векторите от  $A$  стойностите на функцията са произволни – без значение какви стойности има върху останалите три множества. Аналогично, върху векторите от  $D$  стойностите на функцията са произволни – без значение какви стойности има върху останалите три множества.

За да получим броя на търсените функции, достатъчно е да игнорираме едно от множествата  $B$  и  $C$ , да кажем, че игнорираме  $C$ , и да разглеждаме само  $A$ ,  $B$  и  $D$ . За всеки вектор  $z \in A \cup B \cup D$ , стойността на функцията е независима от стойността ѝ върху кой да е друг вектор  $z' \in A \cup B \cup D$ . Тогава отговорът е

$$2^{2^{|A|+|B|+|D|}} = 2^{3 \times 2^{n-2}}$$

Ако заместим  $n = 2$ , получаваме  $2^3$ , което точно съвпада с отговора на Задача 6. □

**Задача 8.** Да се намери броят на булевите функции на  $n$  променливи, които приемат стойност 1 върху поне една двойка противоположни входни вектори.

**Решение:** Отговорът очевидно е  $= 2^{2^n} - |A|$ , където  $A$  е множеството от булевите функции на  $n$  променливи, които не приемат стойност  $1$  върху никои два противоположни вектора. С други думи, за всеки входен вектор  $\mathbf{a}$  и за всяка функция  $f \in A$  е изпълнено:

$$(f(\mathbf{a}) = 0 \wedge f(\bar{\mathbf{a}}) = 0) \vee \quad (4)$$

$$(f(\mathbf{a}) = 0 \wedge f(\bar{\mathbf{a}}) = 1) \vee \quad (5)$$

$$(f(\mathbf{a}) = 1 \wedge f(\bar{\mathbf{a}}) = 0) \quad (6)$$

Двойките противоположни вектори на брой са  $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$ . За всяка такава двойка покажем, че възможностите са точно  $3$  (за да може функцията да бъде от  $A$ ). И така,  $|A| = 3^{2^{n-1}}$ . Отговорът тогава е

$$2^{2^n} - 3^{2^{n-1}} \quad (7)$$

Тук може да възникне следното питане. Щом  $2^{2^n} - 3^{2^{n-1}}$  е мощността на непразно множество, то очевидно това е положително число за всяко  $n$ . Ако обаче не знаем комбинаторните съображения, довели до отговора, а просто видим  $2^{2^n} - 3^{2^{n-1}}$ , може да се запитаем, това не може ли да е отрицателно за някакви  $n$ . С помощта на математическия анализ можем да докажем, че не може да е отрицателно при неограничено нарастване на  $n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^n}}{3^{2^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^n}}{2^{(\log_2 3)2^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(2^n - (\log_2 3)2^{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(2 - \log_2 3)2^{n-1}} = \infty$$

понеже  $2 > \log_2 3$ .

Следното доказателство на същото твърдение е на Добромир Кралчев:

$$2^{2^n} - 3^{2^{n-1}} = 2^{2 \times 2^{n-1}} - 3^{2^{n-1}} = 4^{2^{n-1}} - 3^{2^{n-1}} > 0$$

Тази задача може да се реши и с други съображения. Нека  $B$  е подмножеството на  $\mathcal{F}_2^n$  от функциите, които приемат стойност  $1$  върху поне една двойка противоположни вектори. Ние търсим  $|B|$ . Нека  $B_k$  за  $1 \leq k \leq 2^{n-1}$  е подмножеството от тези функции, които приемат стойност  $1$  върху точно  $k$  двойки противоположни вектори. Очевидно  $B$  се разбива на  $B_1, \dots, B_{2^{n-1}}$ , така че

$$|B| = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |B_k|$$

Лесно се вижда, че

$$|B_k| = \binom{2^{n-1}}{k} 3^{(2^{n-1}-k)}$$

Съображенията са следните: по  $\binom{2^{n-1}}{k}$  начина можем да изберем от всички  $2^{n-1}$  двойки противоположни вектори такива, върху които функцията да има стойност  $1$ , а за всяка от останалите  $2^{n-1} - k$  двойки вектори имаме точно  $3$  възможности (виж (4)), така щото функцията да няма стойност  $1$  върху двата елемента на двойката. И така, отговорът е:

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \binom{2^{n-1}}{k} 3^{(2^{n-1}-k)} \quad (8)$$

От (7) и (8) извеждаме (с комбинаторни разсъждения) твърдеството:

$$2^{2^n} - 3^{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \binom{2^{n-1}}{k} 3^{(2^{n-1}-k)}$$

□

**Задача 9.** За колко булеви функции  $f$  на  $n$  променливи е изпълнено следното: ако  $f(\mathbf{a})$  има стойност 1, то  $f$  има стойност 1 върху всеки вектор, който има поне толкова единици, колкото  $\mathbf{a}$ ?

**Решение:** С други думи, ако  $f$  има стойност 1 върху някакъв вектор  $\mathbf{a}$ , то  $f$  има стойност 1 върху всички вектори от слой на хиперкуба, към който слой принадлежи  $\mathbf{a}$ , и освен това  $f$  има стойност 1 върху всички вектори от всички следващи слоеве. Веднага се вижда, че всяка такава функция има една и съща стойност върху всеки слой на хиперкуба и се определя еднозначно от това, къде е “границата” между нулите и единиците върху хиперкуба;. По-подробно казано, върху някакви последователни слоеве на хиперкуба (може и да няма такива), започвайки от слой 0, функцията има стойност само 0, и после върху всички останали слоеве (може и да няма такива), функцията има стойност само 1. Тъй като слоевете са  $n + 1$ , то има точно  $n + 2$  такива функции. □

**Задача 10.** За колко булеви функции  $f$  на  $n$  променливи е изпълнено следното: ако  $f(\mathbf{a})$  има стойност 1, то  $f$  има стойност 1 върху всеки вектор, който има повече единици от  $\mathbf{a}$ ?

**Решение:** Задачата е подобна на Задача 9, но само донякъде. В Задача 10:

- или има някакъв “граничен слой” в хиперкуба, нека да е слой  $k$ , в който за първи път се появява стойност на функцията 1, като върху всички слоеве с по-малък номер функцията е задължително 0, а върху всички слоеве с по-голям номер функцията е задължително 1,
- или такъв граничен слой няма, тоест изобщо няма единици, тоест функцията е константа-нула<sup>†</sup>.

Първо да сметнем колко са функциите от търсения вид, които имат поне една единица (с други думи, не са константа-нула). Числото  $k$  (номерът на граничния слой) може да е най-малко 0 и най-много  $n$ . Тъй като в слоеве с номера 0, ...,  $k - 1$  и  $k + 1$ , ...,  $n$  нещата са фиксирани, единственото, което варира, е как точно са “раздадени” нулите и единиците в слой  $k$  по такъв начин, че да има поне една единица.

Знаем, че слой  $k$  има мощност  $\binom{n}{k}$ . Всички начини да “раздадем” нули и единици на неговите елементи са  $2^{\binom{n}{k}}$  на брой. От това число вадим единица, за да отразим факта, че върху поне един вектор от слой  $k$  функцията е единица (с други думи, изваждаме от разглеждането раздаването само на нули). И така, за дадено  $k$ , броят на начините функцията да има поне една единица върху векторите на слой  $k$  е  $2^{\binom{n}{k}} - 1$ . А отговорът, съгласно принципа на разбиването, е:

$$\sum_{k=0}^n \left(2^{\binom{n}{k}} - 1\right) = \sum_{k=0}^n \left(2^{\binom{n}{k}}\right) - n - 1 \quad (9)$$

<sup>†</sup>Благодарности на Добромир Кралчев за посочването на това!

Към (9) добавяме единица, защото функцията може да е константа-нула, и получаваме

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - n$$

□

**Задача 11.** Да се намери броят на булевите функции на  $n$  променливи, които нямат фиктивни променливи.

**Решение:** Нека  $\mathbf{G}^n$  е множеството от булевите функции на  $n$  променливи, които нямат фиктивна променлива. Нека  $\mathbf{H}^n$  е множеството на булевите функции на  $n$  променливи, които имат поне една фиктивна променлива. Очевидно  $|\mathbf{G}^n| + |\mathbf{H}^n| = 2^{2^n}$ , съгласно комбинаторния принцип на разбиването, така че

$$|\mathbf{G}^n| = 2^{2^n} - |\mathbf{H}^n|$$

Ако променливите са  $x_1, \dots, x_n$ , нека  $\mathbf{H}^n(i_1, \dots, i_k)$  означава множеството от булевите функции, в които променливи  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  са гарантирано фиктивни (може да има и други фиктивни, но тези със сигурност са фиктивни), където  $k \in \{1, \dots, n\}$  и  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ .

Да разгледаме без ограничение на общността променливата  $x_1$ . В колко функции тя е фиктивна? Може да има и други фиктивни променливи, може и да няма – пита се, за колко функции е изпълнено  $x_1$  да е фиктивна? От дефиницията на фиктивна променлива имаме изискването за всяка от тези функции, да кажем  $f$ , да е изпълнено:

$$f(0, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Ако си представим входните вектори, наредени лексикографски отгоре надолу, иска се функцията (която е колона с височина  $2^n$ ) да е такава, че горната половина на колоната да е точно като долната половина. Ето пример за функция на три променливи, в която  $x_1$  е фиктивна:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Виждаме, че за да бъде  $x_1$  фиктивна, стойността на функцията върху половината вектори определя стойността ѝ върху другата половина. Броят на функциите, в които  $x_1$  е фиктивна, е  $2^{2^{n-1}}$ . Същото е в сила и за всяка друга променлива, но за другите променливи половините вектори не са горната и долната; за  $x_2$ , например, колоната от стойности върху първата и третата четвъртини трябва да е същата като колоната от стойности върху втората и четвъртата четвъртини, и така нататък.

Всяка променлива на функцията може да е фиктивна. Но  $|\mathbf{H}^n|$  не е  $n \times 2^{2^{n-1}}$ , тъй като този израз брои някои функции по няколко пъти. Забележете, че има функции с повече от една фиктивна променлива. Ето пример за функция, в която и  $x_1$ , и  $x_2$  са фиктивни:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

От  $n \times 2^{2^{n-1}}$  ще изваждаме по принципа на включването и изключването: ще намерим колко са функциите, в които две променливи са гарантирано фиктивни, в колко три променливи са гарантирано фиктивни, и така нататък, в колко функции всички  $n$  са фиктивни, и ще построим израз с алтерниращи положителни и отрицателни знаци съгласно принципа на включването и изключването. И така:

$$|\mathbf{H}^n| = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} |\mathbf{H}^n(i_1)| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |\mathbf{H}^n(i_1, i_2)| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |\mathbf{H}^n(i_1, i_2, i_3)| - \dots + (-1)^{n-1} |\mathbf{H}^n(i_1, \dots, i_n)|$$

Както вече видяхме,  $\sum_{1 \leq i_1 \leq n} |\mathbf{H}^n(i_1)| = \binom{n}{1} 2^{2^{n-1}}$ . Аналогично,  $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |\mathbf{H}^n(i_1, i_2)| = \binom{n}{2} 2^{2^{n-2}}$ ,  $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |\mathbf{H}^n(i_1, i_2, i_3)| = \binom{n}{3} 2^{2^{n-3}}$ , и така нататък. Последното събираемо по абсолютна стойност е  $|\mathbf{H}^n(i_1, \dots, i_n)| = |\mathbf{H}^n(1, \dots, n)| = \binom{n}{n} 2^{2^{n-n}} = 1 \times 2^0 = 2$ .

И така, броят на функциите с поне една фиктивна променлива е:

$$|\mathbf{H}^n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$$

Тогава броят на функциите без фиктивни променливи е:

$$|\mathbf{G}^n| = 2^{2^n} - \left( \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}} \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$$

□

**Задача 12.** Дадени са булевите функции  $f = 1011$  и  $g = 1001$ . Да се намери каноничното представяне на функцията  $h(x_2, x_4, x_3) = f(g(x_4, x_3), x_2)$ .

**Решение:** Имената на променливите са дадени по този начин за объркване. С просто преименуване получаваме еквивалентен израз  $h(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_2, x_3), x_1)$ . Каквито и имена на променливи да ползваме, става дума за 3 променливи и таблицата на търсената функция трябва да има 8 реда:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$h(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	?
0	0	1	?
0	1	0	?
0	1	1	?
1	0	0	?
1	0	1	?
1	1	0	?
1	1	1	?



Това, че  $f$  и  $g$  са дадени без имена на променливите няма никакво значение. Очевидно  $f(00) = 1$ ,  $g(00) = 1$ ,  $f(01) = 0$  и така нататък. Функцията  $h$  е дефинирана като  $h(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_2, x_3), x_1)$ . Заместваме в таблицата:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(g(x_2, x_3), x_1)$
0	0	0	?
0	0	1	?
0	1	0	?
0	1	1	?
1	0	0	?
1	0	1	?
1	1	0	?
1	1	1	?

Ще пресмятаме отвътре навън, тъй като тази функция е композиция на  $g(x_2, x_3)$  на мястото на първата променлива на  $f$ . И така, да видим какви са стойностите на  $g(x_2, x_3)$  в таблицата. Те са еднозначно определени, защото на всеки ред  $x_2$  и  $x_3$  си имат някакви стойности, а от каноничната дефиниция на  $g$  знаем какви са функционалните ѝ стойности върху всеки вход.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$g(x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Тук никъде не ползвахме най-лявата колона, защото  $g$  не зависеше от  $x_1$ . В следващата стъпка от решението пък няма да ползваме колоните на  $x_2$  и  $x_3$ , защото  $f$  зависи непосредствено само от стойностите на  $g$  и от  $x_1$ :

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$g(x_2, x_3)$	$f(g(x_2, x_3), x_1)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

За да се убедим, че е така, да си припомним дефиницията  $f = 1011$ . Функцията  $f$  е нула тогава и само тогава, когато входът е  $01$ . На горните четири реда  $x_1 = 0$ , а в израза  $f(g(x_2, x_3), x_1)$ ,  $x_1$  е втората променлива, така че на горните четири реда функцията е четири единици. На долните четири реда,  $x_1 = 1$ , така че функцията просто повтаря стойностите на  $g(x_2, x_3)$ .  $\square$

**Задача 13.** Нека  $f = 1000$  и  $g = 0111$ . Да се намери каноничната форма на функцията  $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2) \wedge g(x_3, x_4)$

**Решение:**

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$f(x_1, x_2)$	$g(x_3, x_4)$	$f(x_1, x_2) \wedge g(x_3, x_4)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0

И така,  $h = 0111\ 0000\ 0000\ 0000$ . □

**Задача 14.** Дадени са следните функции чрез формули:

$$f(x, y, z) = xy \oplus xz \oplus yz$$

$$g(x, y, z) = (x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow z) \oplus (z \rightarrow y))$$

$$h(x, y, z) = (x \rightarrow y)(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$$

Да се намерят каноничните представяния на функциите.

**Отговор:**

$$f(x, y, z) = 00010111$$

$$g(x, y, z) = 10010101$$

$$h(x, y, z) = 11111111$$

□

**Задача 15.** Еквивалентни ли са следните две формули:

$$((x \oplus y) \rightarrow (x \vee y))((\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (x \oplus y))$$

$$x|y$$

**Решение:** Да, еквивалентни са. Ще решим задачата с табличния метод (таблиците не са показани). Първата формула е конюнкция от  $\tilde{1} = ((x \oplus y) \rightarrow (x \vee y))$  и  $1110 = ((\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (x \oplus y))$ , която е очевидно 1110. А долната формула—чертата на Sheffer—е на функцията 1110 по дефиниция. □

**Задача 16.** Докажете чрез еквивалентни преобразувания следните еквивалентности:

- $x \rightarrow (xy \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$ .

- $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$ .

$$\bullet \bar{x}(y \oplus z) = \overline{x \vee ((y \rightarrow z)(z \rightarrow y))}.$$

Разрешените еквивалентни преобразувания са всички свойства на булевите функции на две променливи, дадени в учебника, и освен това свойството на импликацията  $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$  и свойството на сумата по модул две  $x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$ , свойството на еквивалентността  $x \equiv y = xy \vee \bar{x}\bar{y}$ , свойството на чертата на Sheffer  $x|y = \bar{xy}$  и свойството на стрелката на Peirce  $x \downarrow y = x \vee y$ .

**Решение:** Ще покажем само последната еквивалентност, която е

$$\bar{x}(y \oplus z) = \overline{x \vee \underbrace{((y \rightarrow z)(z \rightarrow y))}_A}$$

Да разгледаме израза  $A = (y \rightarrow z)(z \rightarrow y)$ . В сила е:

$$\begin{aligned} A &= (y \rightarrow z)(z \rightarrow y) \quad // \text{ свойство на импликацията} \\ &= (\bar{y} \vee z)(\bar{z} \vee y) \quad // \text{ дистрибутивност на конюнкцията над дизюнкцията} \\ &= \bar{y}\bar{z} \vee \underbrace{\bar{y}y}_0 \vee \underbrace{z\bar{z}}_0 \vee zy \\ &= yz \vee \bar{y}\bar{z} \end{aligned}$$

И така, дясната страна е еквивалентна на

$$\begin{aligned} \overline{x \vee yz \vee \bar{y}\bar{z}} &= \quad // \text{ De Morgan} \\ \bar{x}\bar{y}z\bar{y}\bar{z} &= \quad // \text{ De Morgan} \\ \bar{x}(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{z}) &= \bar{x}(\bar{y} \vee \bar{z})(y \vee z) = \bar{x}(\bar{y}y \vee \bar{y}z \vee \bar{z}y \vee \bar{z}z) = \\ \bar{x}(\bar{y}z \vee \bar{z}y) &= \bar{x}(y \oplus z) \end{aligned}$$

□

**Задача 17.** Докажете чрез еквивалентни преобразувания, че  $x_1$  е фиктивна променлива в следните функции:

- $f(x_1, x_2) = (x_2 \rightarrow x_1)(x_2 \downarrow x_2)$ .
- $g(x_1, x_2) = (x_2 \equiv x_1) \vee (x_1|x_2)$ .
- $h(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_3)(\bar{x}_3 \rightarrow \bar{x}_2)$ .

**Решение:**

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_2 \rightarrow x_1)(x_2 \downarrow x_2) = (x_2 \rightarrow x_1)(\overline{x_2 \vee x_2}) = (x_2 \rightarrow x_1)\bar{x}_2 = \\ &(\bar{x}_2 \vee x_1)\bar{x}_2 = \bar{x}_2\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_2(1 \vee x_1) = \bar{x}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= (x_2 \equiv x_1) \vee (x_1|x_2) = (x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1x_2) = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \\ &x_1x_2 \vee \bar{x}_1(\bar{x}_2 \vee 1) \vee \bar{x}_2 = x_1x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = x_1x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \\ &x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 = \quad // \text{ нека } x_1x_2 = p \\ &p \vee \bar{p} = 1 \end{aligned}$$



□

Следващата задача ползва релацията  $\preceq$ , дефинирана в (2).

**Задача 19.** Да разгледаме някаква  $f \in \mathcal{F}_2^n$ , такава че съществуват  $k$  вектори  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  за някакво  $k \geq 2$ , такива че

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \preceq \mathbf{a}_2 \preceq \dots \preceq \mathbf{a}_k \\ f(\mathbf{a}_1) \neq f(\mathbf{a}_2) \neq \dots \neq f(\mathbf{a}_k) \end{aligned}$$

Да се докаже, че функцията има поне  $k - 1$  съществени променливи.

**Решение:** Релацията  $\preceq$  е рефлексивна, но от второто ограничение следва, че векторите са два по два различни. Да си припомним и релацията  $\prec$ , дефинирана в (3). Очевидно, по отношение на  $\preceq$  има верига

$$\mathbf{a}_1 \prec \mathbf{b}_{1,1} \prec \dots \prec \mathbf{b}_{1,t_1} \prec \mathbf{a}_2 \prec \mathbf{b}_{2,1} \prec \dots \prec \mathbf{b}_{2,t_2} \prec \dots \prec \mathbf{a}_{k-1} \prec \mathbf{b}_{k-1,1} \prec \dots \prec \mathbf{b}_{k-1,t_{k-1}} \prec \mathbf{a}_k$$

Твърдим, че в тази верига има поне  $k - 1$  различни съседни двойки вектори<sup>†</sup>, такива че функцията има противоположни стойности върху векторите от всяка двойка. Това твърдение е очевидно и няма да го доказваме. Векторите от всяка двойка се различават в точно една позиция, следователно са вектори от два съседни слоя на хиперкуба. Прилагаме контрапозитивното твърдение на Лема 1 и виждаме, че функцията има  $k - 1$  фиктивни променливи.

Факта, че всяка двойка двойки задава **различни** фиктивни променливи, поради което заключаваме, че променливите не може да са по-малко от  $k - 1$ , е очевиден. □

**Задача 20.** Нека  $f, g \in \mathbf{F}_2^n$  са такива, че  $f(\mathbf{a}) \oplus g(\mathbf{a}) = 1$  за точно нечетен брой вектори  $\mathbf{a} \in \mathbb{J}_2^n$ . Да се докаже, че всяка променлива е съществена за поне едната от функциите  $f$  и  $g$ .

**Решение:** Ограничението “ $f(\mathbf{a}) \oplus g(\mathbf{a}) = 1$  за точно нечетен брой вектори” е същото като “ $f$  и  $g$  се различават върху точно нечетен брой вектори” – това следва тривиално от дефиницията на функцията  $\oplus$ .

И така, двете функции имат противоположни стойности върху подмножество на  $\mathbb{J}_2^n$  с нечетна мощност. Да допуснем, че съществува променлива  $x_i$ , която е фиктивна и за двете функции. По дефиниция:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) &= f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \\ g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) &= g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

за всяко раздаване на 0 и 1 на променливите  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ .

Да си представим и двете функции едновременно върху хиперкуба – да си представим  $n$ -мерния хиперкуб и до всеки негов връх, стойността на функцията  $f$  в червено и стойността на функцията  $g$  в синьо.

Да срежем хиперкуба в  $i$ -тата размерност. Получаваме два хиперкуба, всеки от размерност  $n - 1$ . За произволен връх  $\mathbf{u}$  от единия получен  $(n - 1)$ -мерен хиперкуб, ако  $\mathbf{v}$  е неговият съответен връх<sup>‡</sup> в другия  $(n - 1)$ -мерен хиперкуб, ясно е, че  $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$  и  $g(\mathbf{u}) = g(\mathbf{v})$  – това е заради фиктивността на  $x_i$  по отношение и на  $f$ , и на  $g$ .

Следователно, броят на върховете, върху които  $f$  и  $g$  имат **една и съща стойност** в единия  $(n - 1)$ -мерен хиперкуб е равен на броя на върховете, върху които  $f$  и  $g$  имат **една и съща стойност** в другия  $(n - 1)$ -мерен хиперкуб. А оттук следва, че броят на върховете,

<sup>†</sup> Две такива двойки може да имат общ елемент, въпреки че са различни като двойки.

<sup>‡</sup> “Съответен връх” означава, че има същия етикет, тоест  $(n - 1)$ -мерен булев вектор.

върху които  $f$  и  $g$  имат **различна стойност** в единия  $(n-1)$ -мерен хиперкуб е равен на броя на върховете, върху които  $f$  и  $g$  имат **различна стойност** в другия  $(n-1)$ -мерен хиперкуб. Но броят на върховете, върху които  $f$  и  $g$  се различават в оригиналния (преди срязването)  $n$ -мерен хиперкуб, е равен на сумата от броя на върховете, върху  $f$  и  $g$  се различават върху единия получен  $(n-1)$ -мерен хиперкуб и броя на върховете, върху  $f$  и  $g$  се различават върху другия получен  $(n-1)$ -мерен хиперкуб. Щом двете събираеми са равни, тяхната сума е четно число. Тогава броят на върховете, върху които  $f$  и  $g$  се различават в оригиналния (преди срязването)  $n$ -мерен хиперкуб, е четна. Коего противоречи на условието на задачата.  $\square$

**Задача 21.** Докажете чрез еквивалентни преобразувания, че следните две формули не са еквивалентни:

$$\begin{aligned} U &= (x \downarrow \bar{y}) \rightarrow (\bar{x}\bar{z} \rightarrow ((\bar{x}|(y \equiv z)) \vee (\bar{x}\bar{y} \vee z))) \\ V &= ((x \rightarrow y)|(x \downarrow (y\bar{z})) \vee \bar{y}\bar{z}) \end{aligned}$$

Разрешените еквивалентни преобразувания са тези от Задача 16.

**Решение:** От една страна:

$$\begin{aligned} U &= \overline{x \downarrow \bar{y}} \vee (\bar{x}\bar{z} \vee ((\bar{x}|(y \equiv z)) \vee (\bar{x}\bar{y} \vee z))) \\ &= \overline{x \vee \bar{y}} \vee \bar{x}\bar{z} \vee ((\bar{x}|(y \equiv z)) \vee (\bar{x}\bar{y} \vee z)) \\ &= x \vee \bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee ((\bar{x}|(y \equiv z)) \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \quad // \text{ понеже е от вида } x \vee \dots \bar{x} \vee \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

От друга страна:

$$\begin{aligned} V &= \overline{(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee y\bar{z})} \vee \bar{y}\bar{z} \\ &= \overline{(\bar{x} \vee y)} \vee \overline{(\bar{x} \vee y\bar{z})} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \\ &= \bar{x}\bar{y} \vee x \vee y\bar{z} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \\ &= x\bar{y} \vee 1\bar{x} \vee y\bar{z} \vee 1\bar{z} \vee \bar{y} \\ &= x(\bar{y} \vee 1) \vee \bar{z}(y \vee 1) \vee \bar{y} = x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \end{aligned}$$

Показахме, че  $V$  е еквивалентна на  $x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$ . От тази проста формула лесно се вижда, че семантиката на  $V$  не е константа-единица. Следователно,  $U$  и  $V$  не са еквивалентни.  $\square$

**Задача 22.** Намерете СъвДНФ на булевата функция  $f = 01110100$ .

**Решение:** Имената на променливите не са уточнени, така че имаме свобода да си ги изберем. Избираме  $x$ ,  $y$  и  $z$ , като се ползва традиционната наредба  $x$ -преди- $y$  и  $y$ -преди- $z$ . Тогава таблицата на функцията е:

$x$	$y$	$z$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

СъвДНФ е:

$$\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z$$

□

**Задача 23.** Намерете СъвДНФ на следните булеви функции:

А)  $(x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_2x_3$

Б)  $f = 01101100$

В)  $g = 0001110110011011$

Г)  $\overline{x_1x_2} \rightarrow \bar{x}_3$

Д)  $(x|y)\bar{z}$

Е)  $xy \equiv (y \equiv z)$

Ако променливите не са именувани явно, допуснете подходящо именуване с, например,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  или  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  и така нататък.

**Отговори и решения:**

А)  $(x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_2x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$

Б)  $f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z$

В)  $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3x_4$

Г)  $\overline{x_1x_2} \rightarrow \bar{x}_3 = \overline{x_1x_2} \vee \bar{x}_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \bar{x}_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = x_1\bar{x}_2x_3$ . В този случай намерихме СъвДНФ с еквивалентни преобразувания. По-точно казано, извършихме редица от еквивалентни преобразувания, резултатът от които е израз, който е СъвДНФ по **формални** причини: има точно такава форма, каквато трябва да има една СъвДНФ.

Д)  $(x|y)\bar{z} = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ . За съжаление, полученият израз **не е** СъвДНФ, защото няма желаната форма! За да е СъвДНФ с една пълна конюнктивна клауза, изразът трябва да е конкатенация от литерали, а този израз не е такъв, защото  $\bar{x}\bar{y}$  нито е литерал, нито е конкатенация от литерали. Ако искаме да решим подзадачата с еквивалентни преобразувания, трябва да продължим.  $\bar{x}\bar{y}\bar{z} = (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} = \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} = \bar{x}\bar{z}(y \vee \bar{y}) \vee \bar{y}\bar{z}(x \vee \bar{x}) = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$

Е)  $\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz \vee \bar{x}\bar{y}z$

□

**Задача 24.** Колко СъвДНФ има над  $n$  променливи?

**Решение:** Броят на пълните конюнктивни клаузи е точно  $2^n$ , защото във всяка от тях участват точно  $n$  литерала, а за всеки от тях има точно  $2$  възможности независимо от останалите. Всяка СъвДНФ се определя еднозначно от това, кои пълни конюнктивни клаузи участват. Но отговорът  $2^{2^n}$  за броя на всички СъвДНФ не е точен, понеже не може да няма нито една пълна конюнктивна клауза. С други думи, празната формула (празният стринг) не е СъвДНФ по дефиниция. Отговорът е  $2^{2^n} - 1$ .

Можем да го получим и с други разсъждения: всяка булева функция на  $n$  променливи без константа-нула има точно една СъвДНФ, а на различни СъвДНФ съответстват различни булеви функции. □

**Задача 25.** Колко ДНФ има над  $n$  променливи?

**Решение:** Трябва да съобразим колко конюнктивни клаузи има. В конюнктивните клаузи има три възможности за всяка променлива (а не две, както беше при пълните конюнктивни клаузи) – променливата може да участва като положителен литерал, като отрицателен литерал или изобщо да не участва. Това означава  $3^n$  възможности, но ако броим и възможността да няма участващи променливи изобщо, тоест празната последователност от литерали (празният стринг). Но ние искаме всяка пълна конюнктивна клауза да е непразна, тоест да има поне един литерал, така че възможността да няма нито един литерал отпада и възможностите са  $3^n - 1$ .

Всяка от пълните конюнктивни клаузи може да участва или да не участва, но трябва да има поне една такава, така че общо възможностите са  $2^{3^n - 1} - 1$ .  $\square$

**Задача 26.** Намерете броя на булевите функции от  $\mathcal{F}_2^n$ , чиито СъвДНФ изпълняват условието:

1. Няма пълна конюнктивна клауза, в която броят на положителните литерали е равен на броя на отрицателните литерали.
2. Всяка пълна конюнктивна клауза има четен брой отрицателни литерали.
3. Всяка пълна конюнктивна клауза има поне два отрицателни литерала.

**Решение:**

1. Ако  $n$  е нечетно, то всички СъвДНФ са такива и отговорът е  $2^{2^n} - 1$ . Ако  $n$  е четно, отговорът е  $2^p - 1$ , където  $p$  е броят на  $n$ -векторите с неравен брой нули и единици. Очевидно,  $p = 2^n - q$ , където  $q$  е броят на  $n$ -векторите с равен брой нули и единици. Но ние знаем, че има точно  $\binom{n}{n/2}$  начина да разположим  $n/2$  нули и  $n/2$  единици в линейна наредба, следователно  $q = \binom{n}{n/2}$ , следователно  $p = 2^n - \binom{n}{n/2}$ , следователно отговорът е  $2^{2^n - \binom{n}{n/2}} - 1$ .
2. За всеки входен вектор съответната пълна конюнктивна клауза участва в СъвДНФ тук функцията има стойност 1 върху този входен вектор. Искане функцията да е задължително 0 върху всички входни вектори с нечетен брой нули, тоест стойността на функцията може да варира само върху векторите с четен брой нули. Отговорът е  $2^{2^{n-1}} - 1$ , защото точно половината† вектори, тоест  $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$ , са тези с четен брой нули, а от  $2^{2^{n-1}}$  вадим единица заради това, че функцията константа-нула няма СъвДНФ.
3. Върху векторите с нула нули и точно една нула, функцията трябва да е задължително 0. Освен това, не може да е константа-нула. Други ограничения няма. Има един вектор с нула нули и  $n$  вектора с точно една нула. Отговорът е  $2^{2^n - n - 1} - 1$ .

$\square$

**Задача 27.** Нека  $n \geq 2$ . Да се определи дължината на СъвДНФ (като брой на пълните конюнктивни клаузи) на следните булеви функции, представени чрез формули:

1.  $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$

†Това се извежда тривиално, имайки предвид резултата от комбинаториката, че броят на подмножествата с четна мощност е равен на броя на подмножествата с нечетна мощност.



2.  $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n)$
3.  $\bigvee_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$
4.  $\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \rightarrow x_j)$

**Решение:** Задачата е същата като “колко единици съдържа каноничното представяне на функцията?”. Каноничното представяне на всяка от тези четири функции има лесна за определяне форма. Трябва да разберем каква е закономерността на каноничното представяне на всяка от тях. Сторим ли това, решението става тривиално.

1. Функцията е сума по модул две на всички променливи. Очевидно, тази сума е 1 точно върху тези вектори, които имат нечетен брой единици. Както вече казахме в решението на Задача 26, векторите с нечетен брой единици са точно половината, тоест  $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$ . Отговорът е точно  $2^{n-1}$ . Забележете, че **не е**  $2^{2^{n-1}}$ , защото върху въпросните вектори стойностите на функцията не варират, а са само единици.
2. Лесно се вижда, че функцията е 0 върху точно два вектора:  $00 \dots 0$  и  $11 \dots 1$ . Отговорът е  $2^n - 2$ .
3. Функцията има стойност 1 точно върху тези вектори, които имат поне две единици в себе си. Векторите, които нямат поне две единици в себе си, са тези с нула единици (само един) и с точно една единица ( $n$  такива). Отговорът е  $2^n - n - 1$ .
4. Може би е по-лесно да се съобрази каква е формата на каноничното представяне, ако използваме различно представяне на същата функция:

$$\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \rightarrow x_j) = \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (\bar{x}_i \vee x_j)$$

Която и от двете формули да разгледаме, виждаме, че функцията е нула върху точно тези вектори, които имат поне една 1, която е вляво от поне една  $0^\dagger$ . Следователно, функцията е единица точно върху векторите  $00 \dots 00$ ,  $00 \dots 01$ ,  $00 \dots 11$ , ...,  $01 \dots 11$ ,  $11 \dots 11$ . Те са точно  $n + 1$ , и това е отговорът.  $\square$

**Задача 28.** Нека  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$  са булеви функции, такива че СъвДНФ на  $f$  има  $k_1$  пълни конюнктивни клаузи, а на  $g$ ,  $k_2$  пълни конюнктивни клаузи. Да се определи дължината, в брой пълни конюнктивни клаузи, на:

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) &= fg \\ t(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) &= f \vee g \end{aligned}$$

**Решение:** Да разгледаме първо  $fg$ . Забележете, че това е функция **не** на  $n$ , а на  $2n$  променливи. Нейната таблица е показана схематично на следната таблица. Да си представим, че върху входните вектори, всеки с дължина  $2n$ , които са общо  $2^{2n}$  на брой, е дефинирано групиране в нещо като правоъгълници с размери  $n \times 2^n$ , които на таблицата са показани в лявата страна, оцветени в розово и зелено. Всеки зелен правоъгълник огражда една група от стойности на  $y$ -променливите, като групите са  $2^n$  общо и съдържанието им е едно и също: всяка група съдържа точно всички  $n$ -вектори в лексикографски ред. Розовите правоъгълници ограждат групи от стойности на  $x$ -променливите, като тези групи пак са  $2^n$  общо и всяка има  $2^n$   $n$ -вектора, но сега всяка група съдържа  $2^n$  копия на един и същи  $n$ -вектор.

$\dagger$  Тоест, в които има  $x_i = 1$  и  $x_j = 0$  при  $i < j$ ; тоест, които са от вида  $\dots 1 \dots 0 \dots$ .

Тъй като функцията  $g$  зависи от  $y$ -стойностите, а функцията  $f$ , от  $x$ -стойностите, в дясната страна, където са функционалните стойности, наблюдаваме следните закономерности. Колоната на  $g$  се състои от  $2^n$  подколони, всяка от които е копие на един и същи pattern, който има точно  $k_2$  единици (по условие  $g$  има СъвДНФ с точно  $k_2$  пълни конюнктивни клаузи). Точно какво е съдържанието на тази повтаряща се колона зависи от конкретиката на  $g$ . В таблицата “ $\tilde{g}_i$ ” е кратък запис за  $g(\tilde{y}_i)$ , където  $\tilde{y}_i$  е  $i$ -ият вектор от  $y$ -векторите, за  $0 \leq i \leq 2^n - 1$ .

От друга страна, колоната на  $f$  се състои от  $2^n$  подколони, всяка от които съдържа  $2^n$  копия на една и съща стойност, а именно функционалната стойност на  $f$  върху  $i$ -ия от  $x$ -векторите за  $0 \leq i \leq 2^n - 1$ , която е отбелязана с  $\tilde{f}_i$ . Очевидно точно  $k_1$  от тези подколони са от единици. Кой точно, зависи от конкретиката на  $f$ .

И така, функцията  $h$  е конюнкция от  $f$  и  $g$ . Колоната на  $h$  не е изобразена, но лесно може да си я представим написана най-вдясно, с височина  $2^{2n}$ , състояща от поелементни конюнкции от колоните на  $g$  и  $f$ . Тривиално е да се съобрази, че ако разбием колоната на  $h$  на  $2^n$  подколони аналогично на разбиванията на колоните на  $g$  и  $f$ , точно  $2^n - k_1$  от подколоните ще са само от нули, защото колоната на  $f$  има точно  $2^n - k_1$  от подколони от нули, които в поелементните конюнкции “нулират” стойността на  $h$  върху дадения  $2n$ -вектор независимо от стойностите на  $g$  върху него. А останалите  $k_1$  на брой подколони на  $f$  са само от единици. За всяка от тях, функцията  $h$  получава точно  $k_2$  единици заради поелементната конюнкция.

Общо,  $h$  има точно  $k_1 \times k_2$  единици.

Сега да разгледаме функцията  $t$ . Съображенията са аналогични и таблицата е същата, но сега търсим мощността не на сечение, а на обединение. Колоната на  $g$  има общо  $k_2 \times 2^n$  единици, а колоната на  $f$  има общо  $k_1 \times 2^n$  единици. От  $k_1 2^n + k_2 2^n = (k_1 + k_2) 2^n$  трябва да извадим, съгласно принципа на включването и изключването, мощността на сечението, която, както вече установихме, е  $k_1 k_2$ . Отговорът е  $(k_1 + k_2) 2^n - k_1 k_2$ .

$x_1, x_2, \dots, x_n$	$y_1, y_2, \dots, y_n$	$g$	$f$
$0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 0$ ..... $0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 0$	$0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 1, 0$ ..... $1, 1, \dots, 1, 0$ $1, 1, \dots, 1, 1$	$\tilde{g}_0$ $\tilde{g}_1$ $\tilde{g}_2$ ... $\tilde{g}_{2^{n-2}}$ $\tilde{g}_{2^{n-1}}$	$\tilde{f}_0$ $\tilde{f}_0$ $\tilde{f}_0$ ... $\tilde{f}_0$ $\tilde{f}_0$
$2^n$ копия на $00 \dots 00$	всички $n$ -вектори, лексикографски	pattern с $k_2$ единици	$2^n$ еднакви ст-сти
$0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 0, 1$ ..... $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 0, 1$	$0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 1, 0$ ..... $1, 1, \dots, 1, 0$ $1, 1, \dots, 1, 1$	$\tilde{g}_0$ $\tilde{g}_1$ $\tilde{g}_2$ ... $\tilde{g}_{2^{n-2}}$ $\tilde{g}_{2^{n-1}}$	$\tilde{f}_1$ $\tilde{f}_1$ $\tilde{f}_1$ ... $\tilde{f}_1$ $\tilde{f}_1$
$2^n$ копия на $00 \dots 01$	всички $n$ -вектори, лексикографски	същият pattern с $k_2$ ед.	$2^n$ еднакви ст-сти
..... ..... ..... .....	..... ..... ..... .....	..... ..... ..... .....	..... ..... ..... .....
$1, 1, \dots, 1, 1$ $1, 1, \dots, 1, 1$ $1, 1, \dots, 1, 1$ ..... $1, 1, \dots, 1, 1$ $1, 1, \dots, 1, 1$	$0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 1, 0$ ..... $1, 1, \dots, 1, 0$ $1, 1, \dots, 1, 1$	$\tilde{g}_0$ $\tilde{g}_1$ $\tilde{g}_2$ ... $\tilde{g}_{2^{n-2}}$ $\tilde{g}_{2^{n-1}}$	$\tilde{f}_{2^{n-1}}$ $\tilde{f}_{2^{n-1}}$ $\tilde{f}_{2^{n-1}}$ ... $\tilde{f}_{2^{n-1}}$ $\tilde{f}_{2^{n-1}}$
$2^n$ копия на $11 \dots 11$	всички $n$ -вектори, лексикографски	същият pattern с $k_2$ ед.	$2^n$ еднакви ст-сти
..... ..... ..... .....	..... ..... ..... .....	..... ..... ..... .....	..... ..... ..... .....

□

### 3 Благодарности

Авторът благодари много на **Добромир Кралчев** за многобройните корекции на граматически и стилистични грешки, както и за корекциите на грешки в решенията на две от задачите. Благодарности на **Стоян Томицин** за откритата грешка в условието на Задача 13. Благодарности на **Християн Валентинов Тонев** за откритите и коригирани грешки в решенията на осем от задачите.

Авторът благодари отново на **Добромир Кралчев** за многобройните граматични и стилистични корекции при повторен прочит.