Задача 1

Нека дефинираме следната релация $R \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$: $aRb \iff \exists k \in \mathbb{N}^+ : b = ak$.

- Да се докаже, че R е релация на частична наредба.
- Да се намерят елементите, които предхождат 10.

Решение

Трябва да се докаже, че релацията е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. По-наблюдателните могат да забележат, че това е релацията “a дели b” над целите положителни числа.

Рефлексивност: $\forall x \in \mathbb{N}^+ : xRx$

Нека $x \in \mathbb{N}^+$. Ясно е, че xRx, понеже $x = x \cdot 1$, $1 \in \mathbb{N}^+$.

Антисиметричност: $\forall a, b \in \mathbb{N}^+ : aRb \wedge bRa \to a = b$

Нека $a, b \in \mathbb{N}^+$. Нека aRb и bRa. Следователно $b = ak_1$ и $a = bk_2$, $k_1, k_2, \in \mathbb{N}^+$. Така $a = \frac{b}{k_1}$ и $a = bk_2$. Следователно $\frac{b}{k_1} = bk_2$ и така получаваме, че $k_1k_2 = 1$. Тъй като $k_1, k_2, \in \mathbb{N}^+$, то $k_1 = k_2 = 1$, което значи, че $a = b$.

Транзитивност: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^+ : aRb \wedge bRc \to aRc$

Нека $a, b, c \in \mathbb{N}^+$. Нека aRb и bRc. Следователно $b = ak_1$ и $c = bk_2$. Така получаваме, че $c = bk_2 = ak_1k_2$. Ясно е, че $k_1k_2 \in \mathbb{N}^+$, Следователно aRc (защото съществува $k \in \mathbb{N}^+$, за което $c = ak$, един вариант за това е k_1k_2).

За втората част от задачата се искаше да се намери следното множество $\{a \in \mathbb{N}^+ | aR10\}$. За да може $aR10$ да е вярно, то трябва да съществува $k \in \mathbb{N}^+$, за което $10 = ak$. Тъй като k е строго положително, то е ясно, че $a \leq 10$. Така търсеното множество е ясно, че е подмножество на $\{1, 2, ..., 10\}$. Лесно може да се провери, че числата, които изпълняват условието са $1, 2, 5, 10$.

Често срещани грешки

а)

При разглеждането на симетричността например, някои хора са взели еднакви k-та. Тоест са казали нещо от вида: aRb и bRa следователно $b = ak$ и $a = bk$. Това е грешно, понеже вие приемате, че k-тата съвпадат, а това изобщо не е ясно. Това са две отделни условия и трябва да се ползват отделни променливи, иначе може да се получат грешки.

Задача 2

На витрината на магазин за плодове и зеленчуци трябва да се наредят 4 ябълки, 4 круши, 4 портокала и 4 лимона. Плодовете от един и същи вид са неразличими.

- По колко начина могат да се подредят 16-те плода, ако не се налагат ограничения?
- По колко начина могат да се наредят, ако искаме всички портокали да са преди всички лимони?
- По колко начина могат да се наредят, ако искаме крушите да бъдат само на четни позиции (позициите са $1, 2, ..., 16$)?
- По колко начина могат да се наредят, ако един до друг може да седят най-много три плода от един и същи вид?

Решение

а)

Тъй като има обекти, които са идентични то ще трябва да използваме формулата за пермутации с повторение. Така решението на случая е $\frac{16!}{4!4!4!4!}$.

б)

Тук може да използваме стандартния трик за търсене на конфигурации където някоя група обекти е преди друга група. Можем да разгледаме портокалите и лимоните като един вид обекти и да намерим техните места и да забележим, че този избор еднозначно определя местата на портокалите и лимоните - понеже е ясно, че първо ще сложим портокалите и после лимоните. Така отговорът се получава $\frac{16!}{8!4!4!}$.

в)

Тук можем да разгледаме процеса на конструиране на наребдите като двустъпков - първо избираме местата на крушите и после нареждаме останалите елементи. Ще наредим крушите на 4 от 8-те четни позиции и и след това ще разбъркаме свободно с формулата за пермутация с повторение останалите 12 плода. Така отговорът се получава $\binom{8}{4}\frac{12!}{4!4!4!}$.

г)

Условието може да се перафразира като: не искаме да седят 4 или повече плода от един вид един до друг и тъй като имаме най-много 4 плода от един вид можем да кажем директно, че не искаме "блок" от 4 еднакви плода. Тук ще използваме принципа за изваждането, тоест ще извадим "лошите" конфигурации от всички. Ясно е, че всичките са $\frac{16!}{4!4!4!4!}$ от **а)**. Лошите отговарят на следното условие: "има блок от 4 ябълки или има блок от 4 круши или има блок от 4 портокала или има блок от 4 лимона".

Нека дефинираме следните множества:

- A_1 - множеството на всички конфигурации, при които 4-те ябълки са заедно
- A_2 - множеството на всички конфигурации, при които 4-те круши са заедно
- A_3 - множеството на всички конфигурации, при които 4-те портокала са заедно
- A_4 - множеството на всички конфигурации, при които 4-те лимона са заедно

Ние се интересуваме от количеството $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$. За жалост тези множества имат сечение (понеже е възможно 4-те ябълки да са заедно и 4-те круши да са заедно едновременно), затова не можем да използваме принципа за събирането, а ще трябва да използваме този за включването и изключването. Тоест имаме, че

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{I \subseteq \{1,2,3,4\}, I \neq \emptyset} |\bigcap_{i \in I} A_i| (-1)^{|I|+1}$$

от формулата за включването и изключването. Нека се опитаме да пресметнем мощностите на някои сечения.

Нека разгледаме $|A_1|$. Тук имаме един блок от 4 ябълки и останлите плодове могат да се бъркат свободно. Можем да приемем блока за един цял обкет и да го сложим при останалите. Така имаме 13 обекта (3 по 4 плода плюс един блок) и можем да ги бъркаме по $\frac{13!}{4!4!4!1!}$ начина. Забелязваме, че това разсъждение важи и за A_2, A_3, и A_4.

Нека разгледаме $|A_1 \cap A_2|$. Тук имаме един блок от 4 ябълки, един блок от 4 круши и останлите плодове могат да се бъркат свободно. Отново приемаме блоковете за цели елементи и получава 10 обекта (2 по 4 плода плюс два блока), които можем да разбъракме по $\frac{10!}{4!4!1!1!}$ начина. Отново забелязваме, че това разсъждение не зависеше от конкретния вид плодове и можем да го обобщим за всяко сечение на две различни множества.

Аналогично получаваме, че $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \frac{7!}{4!1!1!1!}$ и че $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \frac{4!}{1!1!1!1!}$.

Забелязваме, че можем да изведем обща формула за сечението на няколко множества. По-конкретно може да се каже, че $|\bigcap_{i \in I} A_i| = \dfrac{(16-3|I|)!}{(4!)^{4-|I|}(1!)^{|I|}} = \dfrac{(16-3|I|)!}{(4!)^{4-|I|}}$. Така можем да презапишем формулата от преди малко така:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{I \subseteq \{1,2,3,4\}, I \neq \emptyset} |\bigcap_{i \in I} A_i| (-1)^{|I|+1} = \sum_{I \subseteq \{1,2,3,4\}, I \neq \emptyset} \frac{(16-3|I|)!}{(4!)^{4-|I|}} (-1)^{|I|+1}$$

Важното в случая е, че всяко събираемо на сумата зависи само от големината на I, а не от елементите му. Тоест с други думи, можем да намираме мощноста на сечението на произволен брой от нашите множества, понеже сме си намерили формули. Така можем да итерираме не по самите подмножества на индексното множество $\{1, 2, 3, 4\}$, а по техните мощности. По-просто казано, можем да не пишем много събираеми в сметката ($2^4 - 1$, ако трябва да сме точни), а можем да използваме само 4 като групираме еднаквите. Забелязваме, че има точно $\binom{4}{1}$ сечения на едно множество, $\binom{4}{2}$ сечения на две множества и т.н. Така можем да запишем съкратено следното

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} \frac{(16-3k)!}{(4!)^{4-k}} (-1)^{k+1}$$

Така отговорът на задачата става

$$\frac{16!}{4!4!4!4!} - \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} \frac{(16-3k)!}{(4!)^{4-k}} (-1)^{k+1} = \frac{16!}{4!4!4!4!} + \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} \frac{(16-3k)!}{(4!)^{4-k}} (-1)^{k}$$

Често срещани грешки

б)

Някои хора са забелязали, че тъй като портокалите трябва да са преди лимоните, то могат да бъдат разделени с някаква "линия". Това е така, проблемът е, че те са дали като отговор $\sum_{k=1}^{16} \binom{k}{4} \binom{16-k}{4} \frac{8}{4!4!}$. Проблемът е, че това брои някои конфигурации по няколко пъти. Например нека портокалите бъдат на позици $\{2, 3, 4, 5\}$, а лимоните на $\{10, 13, 14, 15\}$. Тук може за k да се ползва 5, но и $6, 7, ..., 9$. И затова решението overcount-ва. Ако искате да използвате тази идея може да фиксирате не границата, ами позицията на последния портокал и така да локализирате само 3 портокала. Правилно би било да се даде този отговор: $\sum_{k=1}^{16} \binom{k-1}{3} \binom{16-k}{4} \frac{8}{4!4!}$.

г)

Някои хора са дали правилни отговори и са казали, че това следва от принципа на включването и изключването, но не са обяснили точно кои са множествата, как се секат, как се прави “оптимизацията” на сумата и прочее. Редно е поне да се обяснява кои са множествата.