Домашно №1 по Дискретни Структури, специалност КН, I курс, I и II поток.

Домашните работи се предават на съответния асистент на упражнение през седмицата 04.10.2013–08.11.2013 (шестата седмица от семестъра).

Име: .... ФН№: .... Група: ......

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получена оценка							
от максимално	*10*	*10*	*10*	*15*	*15*	*15*	*75*

Зад. 1 Докажете по индукция, че $\forall n \geq 1 : \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Можете да ползвате наготово изучаваните в час свойства на операциите върху множества.

Зад. 2 Докажете по индукция, че $\forall n \geq 1 : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

Зад. 3 Докажете по индукция, че $\forall n \geq 1 : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$, където нотацията H_n означава $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Зад. 4 Докажете, че множеството

$$A = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

е изброимо безкрайно. Приемат се **само** подробни доказателства, следващи стриктно определението за изброимо безкрайно множество. $\mathbb{N}$ означава множеството от естествените числа $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Зад. 5 Докажете или опровергайте, че операцията "разлика на множества" е асоциативна. Докажете или опровергайте, че операцията "сечение на множества" е дистрибутивна спрямо операцията "симетрична разлика на множества". Приемат се само отговори, използващи табличния метод.

Упътване: да си припомним какво означава "асоциативна операция" и "операция е дистрибутивна спрямо друга операция". Ако $\oplus$ и $\ominus$ са произволни двуместни операции (тоест, с по два аргумента), то

- *$\oplus$ е асоциативна тогава и само тогава, когато за всеки три елемента x, y и z, такива че $\oplus$ може да се прилага върху тях, е в сила*

  $$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

- *$\oplus$ е дистрибутивна спрямо $\ominus$ тогава и само тогава, когато за всеки три елемента x, y и z, такива че $\oplus$ и $\ominus$ може да се прилагат върху тях, е в сила*

  $$x \oplus (y \ominus z) = (x \oplus y) \ominus (x \oplus z)$$

Зад. 6 Нека $S = \{a, b, c\}$. Напишете *в явен вид* всички релации $R \subseteq S \times S$, които са рефлексивни и антисиметрични и *не са* транзитивни. Приемат се само отговори, в които релациите са описани чрез булеви матрици.

Числен отговор: релациите са 8.

Упътване: нарисувайте си матрица 3×3, *която ще бъде общият вид на Вашия отговор. Преценете, че елементите по главния диагонал трябва да са единици, щом релациите са рефлексивни. Получената дотук матрица с единици по главния диагонал е общият вид на Вашия отговор.*

Оставащите елементи от матрицата могат да приемат стойности 0 *или* 1, *но не произволно! Имайте предвид, че антисиметричността налага ограничението, във всяка двойка симетрични спрямо главния диагонал елементи да* **да няма** *едновременно единици. С други думи, във всяка двойка симетрични спрямо главния диагонал елементи може да има едновременно* 0 *и* 0, *или* 0 *и* 1, *или* 1 *и* 0. *Тъй като има точно* 3 *двойки симетрични спрямо главния диагонал елементи, и за всяка от тях има три възможни начина да бъде попълнена, матриците на релациите, които са рефлексивни и антисиметрични, са общо* 27.

Дотук не сме използвали условието, че релациите трябва да не са транзитивни. От получените досега 27 *релации с детайлна проверка установете, че* 19 *са транзитивни, а* 8 *не са транзитивни. Отговорът, който се очаква от Вас, са именно тези* 8 *релации, и по-точно техните матрици.*