Изпит–задачи по Дискретни структури, КН 2 поток, 11 февруари 2023 г.

Втора част

Име: .... ФN°: .... Група: ....

Зад.	4	5	6	*Общо на част 2*	*Общо на изпита*
точки					
от макс.	20	20	20	60	120

Можете да ползвате наготово изучаваното на лекции, но ***всичко друго*** *трябва да се обоснове добре.*

Задача 4. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Дадена е редица $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ от естествени числа, такава че $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Докажете, че съществува дърво, такова че $\boldsymbol{\alpha}$ е неговата редица от степените, тогава и само тогава, когато $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2n - 2$.

Забележка: *Този резултат НЕ Е доказван на лекции и не може да се ползва наготово. Иска се да го докажете подробно и формално.*

18 т. **Задача 5.** Нека n и k са естествени числа. Нека $s(n, k)$ означава броят на начините числото n да бъде представено като сбор на точно k цели положителни събираеми, като редът на събираемите няма значение. За определеност ще пишем събираемите в ненамаляващ ред. Примерно, 4 може да се представи като сбор на две събираеми по един от тези два начина $\boxed{4 = 1 + 3}$, $\boxed{4 = 2 + 2}$, поради което $s(4, 2) = 2$, а 4 може да се представи като сбор на три събираеми по само един начин $\boxed{4 = 1 + 1 + 2}$, поради което $s(4, 3) = 1$. Докажете с комбинаторни съображения, че

$$s(n,k) = \begin{cases} 1, & \text{ако } k = n \\ 0, & \text{ако } (k = 0 \text{ и } n > 0) \text{ или } n < k \\ s(n-k,k) + s(n-1,k-1), & \text{ако } 0 < k < n \end{cases} \tag{1}$$

2 т. Ползвайки рекурентното уравнение (1), попълнете таблица вдясно със стойностите на $s(n, k)$ за $0 \leq k, n \leq 5$. Няма смисъл да преписвате таблицата в беловата си – можете да пишете направо тук. Попълнената таблица носи точки само ако рекурентното уравнение (1) е обосновано.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Задача 6. Колко са неименуваните дървета със 7 върхове? Трябва да аргументирате добре отговорите си. Само рисунки без обяснения не носят точки.

Едно възможно решение се основава на Вашите решения на **Задача 4** и **Задача 5**.

- Първо конструирайте редиците от степените на върховете на въпросните дървета. За да докажете прецизно, че няма други редици освен тези, които сте написали, може да съобразите
  1. колко елементи има такава редица
  2. каква е сумата от числата в нея
  3. колко е разликата между тази сума и броя на елементите
  4. как се “разпределя” тази разлика в редицата.

  и да ползвате решението на **Задача 5**.

- За всяка редица α от степените на върховете, която сте конструирали, преценете колко неименувани дървета със 7 върхове имат α за редица от степените на върховете. Аргументирайте подробно и прецизно това.

Ако използвате този подход, трябва са сте решили поне **Задача 4**, за да получите точки.

Бонус 20 т. Ако намерите обосновано и броя на именуваните дървета със 7 върхове, ще получите бонус от 20 точки.