# Примерни решения на задачите от изпита по Дискретни Структури, КН 2 поток, 11 февруари 2023 г.

**Задача 1.** На лекции конструирахме двоичен суматор: абстрактно устройство, състоящо се от функционални елементи тип обобщена конюнкция, обобщена дизюнкция и отрицание, което събира числата, записани в два 2-битови регистъра в двоична позиционна бройна система.

Тук се иска да конструирате двоичен мултипликатор: устройство, състоящо се от същите видове функционални елементи, което умножава числата, записани в два 2-битови регистъра в двоична позиционна бройна система.

Ако Вашето решение следва схемата на решението за суматора, не се иска да пишете словесна обосновка. Ако обаче Вашето решение е радикално различно като идея, трябва да бъде добре обосновано.

**Решение.** Резултатът от умножаването на две двубитови числа може да е девет, така че за резултата ни трябват четири, а не три бита. Това е единствената съществена разлика със суматора, който видяхме на лекции. Друга разлика е, че при мултипликатора четирите булеви функции, съответни на четирите бита на изходния регистър, съдържат доста малко единици, което прави конструкцията със СъвДНФ доста по-проста и лека от онази, която видяхме на лекции.

Нека изходният регистър е $\boxed{z_1\, z_2\, z_3\, z_4}$, като $z_4$ е най-младшият бит, а $z_1$ е най-старшият бит. Булевите функции $z_1$, $z_2$, $z_3$ и $z_4$ в СъвДНФ са:

| $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $z_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | A |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | B |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | C |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | D |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | E |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | F |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | G |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | H |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | J |

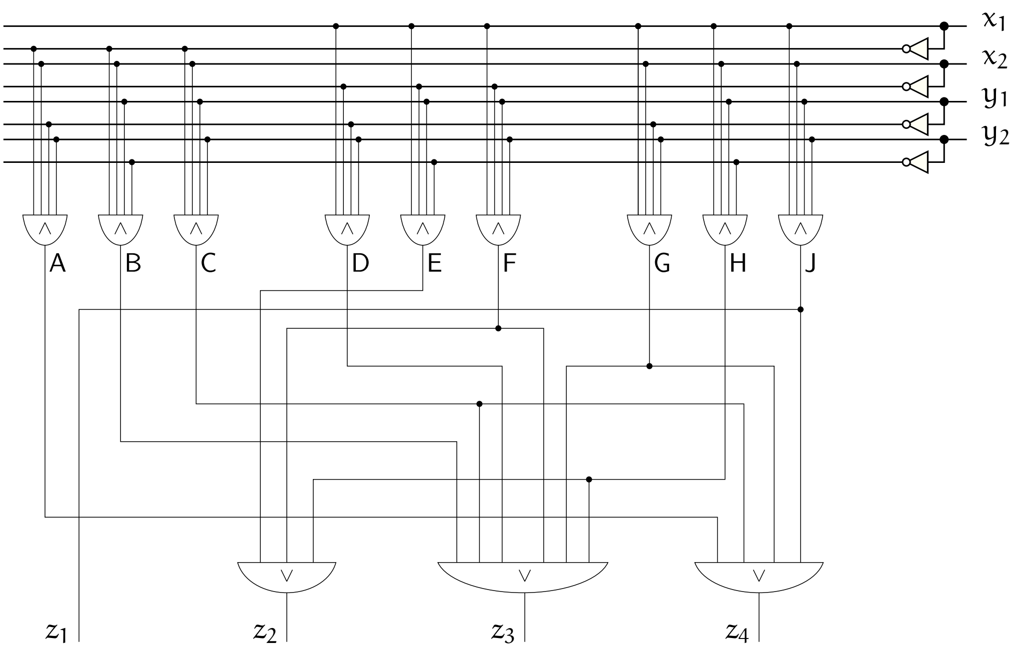
$$z_4 = \underbrace{\overline{x_1}x_2\overline{y_1}y_2}_{\text{A}} \vee \underbrace{\overline{x_1}x_2y_1y_2}_{\text{C}} \vee \underbrace{x_1x_2\overline{y_1}y_2}_{\text{G}} \vee \underbrace{x_1x_2y_1y_2}_{\text{J}}$$

$$z_3 = \underbrace{\overline{x_1}x_2y_1\overline{y_2}}_{\text{B}} \vee \underbrace{\overline{x_1}x_2y_1y_2}_{\text{C}} \vee \underbrace{x_1\overline{x_2}\,\overline{y_1}y_2}_{\text{D}} \vee \underbrace{x_1\overline{x_2}y_1y_2}_{\text{F}} \vee \underbrace{x_1x_2\overline{y_1}y_2}_{\text{G}} \vee \underbrace{x_1x_2y_1\overline{y_2}}_{\text{H}}$$

$$z_2 = \underbrace{x_1\overline{x_2}y_1\overline{y_2}}_{\text{E}} \vee \underbrace{x_1\overline{x_2}y_1y_2}_{\text{F}} \vee \underbrace{x_1x_2y_1\overline{y_2}}_{\text{H}}$$

$$z_1 = \underbrace{x_1x_2y_1y_2}_{\text{J}}$$

Двоичният мултипликатор:



**Задача 2.** Червената Шапчица трябва да занесе кошница с плодове на баба си. Плодовете са четири вида: ябълки, круши, портокали и смокини. В кошницата трябва да има точно 40 плодове, като

- поне 3 са ябълки,
- крушите са поне 3, но не повече от 10,
- портокалите са поне 2, но не повече от 6,
- смокините са поне 6, но не повече от 13.

По колко различни начина Червената Шапчица може да сложи плодове в кошницата, така че да удовлетвори изброените условия? Приемете, че Червената Шапчица разполага с неограничен брой плодове от всеки вид.

Иска се **числен** отговор.

**Решение.** Нека $u$ е броят на ябълките, $v$ е броят на крушите, $x$ е броят на портокалите, а $y$ е броят на смокините. Пита се колко целочислени решения има уравнението

$$u + v + x + y = 40 \tag{1}$$

при следните ограничения отдолу

$$\begin{aligned} u &\geq 3 \\ v &\geq 3 \\ x &\geq 2 \\ y &\geq 6 \end{aligned}$$

и отгоре

$$\begin{aligned} v &\leq 10 \\ x &\leq 6 \\ y &\leq 13 \end{aligned}$$

Ограниченията отдолу се моделират лесно. Нека

$$\begin{aligned} u' &= u - 3 \\ v' &= v - 3 \\ x' &= x - 2 \\ y' &= y - 6 \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} u &= u' + 3 \\ v &= v' + 3 \\ x &= x' + 2 \\ y &= y' + 6 \end{aligned}$$

Заместваме в (1) и получаваме

$$(u' + 3) + (v' + 3) + (x' + 2) + (y' + 6) = 40 \leftrightarrow$$
$$u' + v' + x' + y' = 26 \tag{2}$$

Това е уравнението, броят на чиито решения търсим, при ограниченията

$$\begin{aligned} v' + 3 \leq 10 &\leftrightarrow v' \leq 7 \\ x' + 2 \leq 6 &\leftrightarrow x' \leq 4 \\ y' + 6 \leq 13 &\leftrightarrow y' \leq 7 \end{aligned}$$

Разговорно казано, Червената Шапчица слага в кошницата 3 ябълки, 3 круши, 2 портокала и 6 смокини, след което трябва да сложи още 26 плодове, като крушите са не повече от 7, портокалите са не повече от 4, а смокините са не повече от 7.

За простота преставаме да пишем примовете; тоест, връщаме се към началните имена на променливи. Търсим броя на решенията на

$$u + v + x + y = 26 \tag{3}$$

при ограниченията

$$\begin{aligned} v &\leq 7 \\ x &\leq 4 \\ y &\leq 7 \end{aligned}$$

Прилагаме принципа на включването и изключването. Универсумът $U$ е множеството от всички решения на (3) в цели положителни числа. Нека $S_v$ е подмножеството на универсума, в което $v \geq 8$. Нека $S_x$ е подмножеството на универсума, в което $x \geq 5$. Нека $S_y$ е подмножеството на универсума, в което $y \geq 8$. Търсим

$$|\overline{S_v} \cap \overline{S_x} \cap \overline{S_y}|$$

Съгласно принципа на включването и изключването,

$$|\overline{S_v} \cap \overline{S_x} \cap \overline{S_y}| = |U| - \big(|S_v| + |S_x| + |S_y|\big) + \big(|S_v \cap S_x| + |S_v \cap S_y| + |S_x \cap S_y|\big) - |S_v \cap S_x \cap S_y| \tag{4}$$

Както знаем от лекции, $U$ е съизброимо с множеството от разполагания на 26 анонимни топки (единици) в 4 именувани кутии. Тогава

$$|U| = \binom{26 + 4 - 1}{4 - 1} = 3\,654$$

Да пресметнем $|S_v|$. Нека $v = v'' + 8$. $S_v$ е множеството от решенията на

$$u + v'' + 8 + x + y = 26$$

в цели положителни числа; тоест, на $u + v'' + x + y = 18$. Тогава

$$|S_v| = \binom{18 + 4 - 1}{4 - 1} = 1\,330$$

Да пресметнем $|S_x|$. Нека $x = x'' + 5$. $S_x$ е множеството от решенията на

$$u + v + x'' + 5 + y = 26$$

в цели положителни числа; тоест, на $u + v + x'' + y = 21$. Тогава

$$|S_x| = \binom{21 + 4 - 1}{4 - 1} = 2\,024$$

Очевидно $|S_y| = |S_v|$, така че $|S_y| = 1\,330$.

Да пресметнем $|S_v \cap S_x|$. $S_v \cap S_x$ е множеството от решенията на

$$u + v'' + 8 + x'' + 5 + y = 26$$

в цели положителни числа; тоест, на $u + v'' + x'' + y = 13$. Тогава

$$|S_v \cap S_x| = \binom{13 + 4 - 1}{4 - 1} = 560$$

Да пресметнем $|S_v \cap S_y|$. $S_v \cap S_y$ е множеството от решенията на

$$u + v'' + 8 + x + y + 8 = 26$$

в цели положителни числа; тоест, на $u + v'' + x + y'' = 10$. Тогава

$$|S_v \cap S_y| = \binom{10+4-1}{4-1} = 286$$

Очевидно $|S_x \cap S_y| = |S_v \cap S_x|$, така че $|S_x \cap S_y| = 560$.
И накрая да пресметнем $|S_v \cap S_x \cap S_y|$. $S_v \cap S_x \cap S_y$ е множеството от решенията на

$$u + v'' + 8 + x'' + 5 + y'' + 8 = 26$$

в цели положителни числа; тоест, на $u + v'' + x'' + y'' = 5$. Тогава

$$|S_v \cap S_x \cap S_y| = \binom{5+4-1}{4-1} = 56$$

Заместваме всички получени мощности на множества в дясната страна на (4) и получаваме

$$|\overline{S_v} \cap \overline{S_x} \cap \overline{S_y}| = 3\,654 - \big(1\,330 + 2\,024 + 1\,330\big) + \big(560 + 286 + 560\big) - 56 = 320$$

**Задача 3.** Нека $A$ е множество. Дадена е релация $R \subseteq A \times A$. *Обратната релация на* $R$ бележим с $R^{-1}$ и я дефинираме така:

$$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in A \times A \,|\, (b, a) \in R\}$$

Докажете, че $R$ е антисиметрична тогава и само тогава, когато

$$R \cap R^{-1} \subseteq \{(a, a) \,|\, a \in A\}$$

Може да допуснете, че $A$ е крайно.

**Решение.** В едната посока, да допуснем, че $R$ е антисиметрична. Ще докажем, че за произволна наредена двойка $(x, y) \in A \times A$, $(x, y) \in R \cap R^{-1} \rightarrow x = y$. Нека $(x, y) \in R \cap R^{-1}$. Тогава $(x, y) \in R$ и $(x, y) \in R^{-1}$, като последното е същото като $(y, x) \in R$ от дефиницията на $R^{-1}$. Тогава $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$. Прилагаме определението на "антисиметрична релация" и заключаваме, че $x = y$. Тогава всеки елемент на $R \cap R^{-1}$ е и елемент на $\{(a, a) \,|\, a \in A\}$. Тогава $R \cap R^{-1}$ е подмножество на $\{(a, a) \,|\, a \in A\}$.

В другата посока, нека $R \cap R^{-1} \subseteq \{(a, a) \,|\, a \in A\}$. Ще докажем, че $R$ е антисиметрична. И по-точно, ще докажем, че за всяко наредена двойка $(x, y) \in A \times A$ е вярно, че ако $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$, то $x = y$. Разглеждаме произволна $(x, y) \in A \times A$, такава че $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$. Но тогава $(x, y) \in R^{-1}$, така че $(x, y) \in R \cap R^{-1}$. Съгласно текущото допускане, $(x, y)$ е елемент на $\{(a, a) \,|\, a \in A\}$. Но това е множеството от наредените двойки с един и същи първи и втори елемент. Тогава $x = y$.

**Задача 4.**

**Решение.** Тази задача е давана на домашно.

18 т. **Задача 5.** Нека $n$ и $k$ са естествени числа. Нека $s(n,k)$ означава броят на начините числото $n$ да бъде представено като сбор на точно $k$ цели положителни събираеми, като редът на събираемите няма значение. За определеност ще пишем събираемите в ненамаляващ ред. Примерно, 4 може да се представи като сбор на две събираеми по един от тези два начина $\boxed{4=1+3}$, $\boxed{4=2+2}$, поради което $s(4,2)=2$, а 4 може да се представи като сбор на три събираеми по само един начин $\boxed{4=1+1+2}$, поради което $s(4,3)=1$. Докажете с комбинаторни съображения, че

$$s(n,k)=\begin{cases}1, & \text{ако } k=n\\ 0, & \text{ако } (k=0 \text{ и } n>0) \text{ или } n<k\\ s(n-k,k)+s(n-1,k-1), & \text{ако } 0<k<n\end{cases} \tag{5}$$

2 т. Ползвайки рекурентното уравнение (5), попълнете таблица вдясно със стойностите на $s(n,k)$ за $0 \le k,n \le 5$. Няма смисъл да преписвате таблицата в беловата си – можете да пишете направо тук. Попълнената таблица носи точки само ако рекурентното уравнение (5) е обосновано.

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |

**Решение.** Ще обосновем (5). Началните условия се обосноват така.

- $k=n$ означава, че събираемите са $n$ на брой. Ако $n>0$, очевидно има само един такъв сбор:

  $$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ събираеми}}$$

  Ако $n=0$, пак има само един такъв сбор, но той е празният сбор с нула събираеми. И така, $s(n,n)=1$ за всяко $n$.

- $k=0$, $n>0$ означава сбор от нула събираеми на положително число. Това е невъзможно, така че $s(n,0)=0$ за $n>0$.

  $n<k$ означава повече събираеми, отколкото е големината на числото, което също е невъзможно, така че $s(n,k)=0$ за $n<k$.

Аргументацията за "същинската рекурсия" при $0<k<n$ е следната. Разглеждаме сборовете на $n$ с $k$ събираеми. Разбиваме сборовете на тези, които имат събираемо 1, и тези, чието най-малко събираемо е по-голямо от 1.

- Броят на тези, които имат поне едно събираемо 1, е $s(n-1,k-1)$, понеже съществува очевидна биекция между тях и всички сборове на $n-1$ с точно $k-1$ събираеми.

- Броят на тези, чието най-малко събираемо е по-голямо от 1, е $s(n-k,k)$. Причината е, че ако извадим единица от всяка събираемо—това означава да извадим общо $k$ единици—ще получим $k$ на брой положителни събираеми, така че съществува биекция между сборовете на $n$ с точно $k$ събираеми, всяка от които е по-голямо от 1, и всички сборове на $n-k$ с точно $k$ събираеми.

По принципа на разбиването, $s(n,k)=s(n-k,k)+s(n-1,k-1)$.

Да попълним таблицата. Главният диагонал е от единици заради $s(n,n)=1$:

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | | 1 | | | | |
| 2 | | | 1 | | | |
| 3 | | | | 1 | | |
| 4 | | | | | 1 | |
| 5 | | | | | | 1 |

Колоната $k = 0$, от ред $n = 1$ надолу, е от нули заради $s(n, 0) = 0$ при $n > 0$:

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 2 | 0 | | 1 | | | |
| 3 | 0 | | | 1 | | |
| 4 | 0 | | | | 1 | |
| 5 | 0 | | | | | 1 |

Над главния диагонал са нули заради $s(n, k) = 0$ при $n < k$:

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | | | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | | | | 1 | 0 |
| 5 | 0 | | | | | 1 |

После изчисляваме съгласно $s(n, k) = s(n - k, k) + s(n - 1, k - 1)$:

$$
\begin{aligned}
s(2,1) &= s(2-1,1) + s(1,0) = s(1,1) + s(1,0) = 1 + 0 = 1\\
s(3,1) &= s(3-1,1) + s(2,0) = s(2,1) + s(2,0) = 1 + 0 = 1\\
s(3,2) &= s(3-2,2) + s(2,1) = s(1,2) + s(2,1) = 0 + 1 = 1\\
s(4,1) &= s(4-1,1) + s(3,0) = s(3,1) + s(3,0) = 1 + 0 = 1\\
s(4,2) &= s(4-2,2) + s(3,1) = s(2,2) + s(3,1) = 1 + 1 = 2\\
s(4,3) &= s(4-3,3) + s(3,2) = s(1,3) + s(3,2) = 0 + 1 = 1\\
s(5,1) &= s(5-1,1) + s(4,0) = s(4,1) + s(4,0) = 1 + 0 = 1\\
s(5,2) &= s(5-2,2) + s(4,1) = s(3,2) + s(4,1) = 1 + 1 = 2\\
s(5,3) &= s(5-3,3) + s(4,2) = s(2,3) + s(4,2) = 0 + 2 = 2\\
s(5,4) &= s(5-4,4) + s(4,3) = s(1,4) + s(4,3) = 0 + 1 = 1
\end{aligned}
$$

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |

**Задача 6.** Колко са неименуваните дървета със 7 върхове? Трябва да аргументирате добре отговорите си. Само рисунки без обяснения не носят точки.

Едно възможно решение се основава на Вашите решения на **Задача 4** и **Задача 5**.

- Първо конструирайте редиците от степените на върховете на въпросните дървета. За да докажете прецизно, че няма други редици освен тези, които сте написали, може да съобразите

  1. колко елементи има такава редица
  2. каква е сумата от числата в нея
  3. колко е разликата между тази сума и броя на елементите
  4. как се "разпределя" тази разлика в редицата.

  и да ползвате решението на **Задача 5**.

- За всяка редица $\alpha$ от степените на върховете, която сте конструирали, преценете колко неименувани дървета със 7 върхове имат $\alpha$ за редица от степените на върховете. Аргументирайте подробно и прецизно това.

Ако използвате този подход, трябва са сте решили поне **Задача 4**, за да получите точки.

**Решение.** От решението на **Задача 4** знаем, че редица от седем цели положителни числа в ненамаляващ ред е редица от степените на някое дърво тогава и само тогава, когато сумата от елементите ѝ е $2 \times 7 - 2 = 12$. Да конструираме всички тези редици. Те са точно седем на брой:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2 \\
\alpha_2 &= 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3 \\
\alpha_3 &= 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3 \\
\alpha_4 &= 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4 \\
\alpha_5 &= 1, 1, 1, 1, 1, 3, 4 \\
\alpha_6 &= 1, 1, 1, 1, 1, 2, 5 \\
\alpha_7 &= 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6
\end{aligned}$$

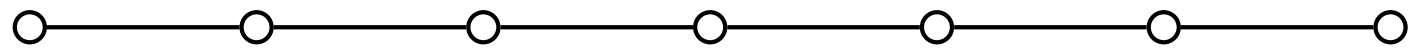
За да се убедим, че няма други такива редици, можем да ползваме **Задача 5** със следните разсъждения. Всяка $\alpha_i$ има точно седем положителни елемента и е в ненамаляващ ред. Ако извадим единица от всеки елемент и игнорираме водещите нули, ще получим нова редица $\alpha'_i$ от положителни числа в ненамаляващ ред, чиято сума е $12 - 7 = 5$. А именно,

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 &= 1, 1, 1, 1, 1 \\
\alpha'_2 &= 1, 1, 1, 2 \\
\alpha'_3 &= 1, 2, 2 \\
\alpha'_4 &= 1, 1, 3 \\
\alpha'_5 &= 2, 3 \\
\alpha'_6 &= 1, 4 \\
\alpha'_7 &= 5
\end{aligned}$$

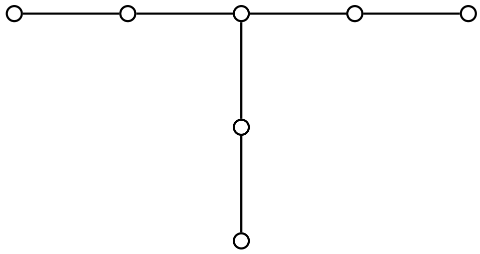
Но тези редици точно отговарят на различните начини да представим петицата като сума от цели положителни събираеми, написани в ненамаляващ ред. Тези различни начини са седем на брой: сумирайте последния ред ($n = 5$) в попълнената таблица в **Задача 5** и ще получите $0 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7$. Заключаваме, че редиците от степените на върхове са точно седем.

Но неименуваните дървета на 7 върхове са повече от седем. Причината е, че някои редици от степени съответстват на няколко неименувани дървета. Да разгледаме редиците от степените подробно.

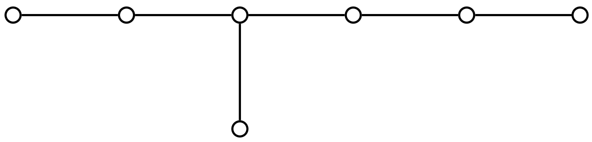
1. $\alpha_1 = 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2$. На тази редица съответства само едно дърво, което е граф-път. Това е очевидно.



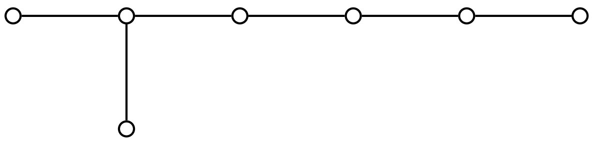
2. $\alpha_2 = 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3$. Сега има един връх от степен 3 и три върхове от степен 2. Може върхът от степен 3 да е съсед на всеки от трите върхове от степен 2, което дава едно дърво, защото има само един начин да бъдат "закачени" останалите три върхове (те са от степен 1) към върховете от степен 2.



Може върхът от степен 3 да е съсед на точно два върха от степен 2, което означава, че третият му съсед е от степен 1, и тогава третият връх от степен 2 е съсед на някой от преждеспоменатите върхове от степен 2, няма значение кой. За останалите два върха от степен 1 няма избор, освен да бъдат "закачени" към тези два върха от степен 2, които си нямат втори съсед в конструкцията дотук.

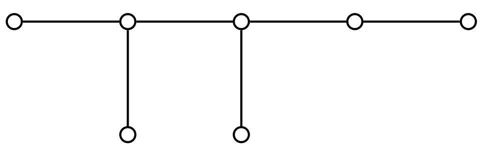


А може върхът от степен 3 да е съсед на два върха от степен 1. Това означава, че трите върха от степен 2 индуцират път, единият край на който е съсед на върха от степен 3, а другият, на третия връх от степен 1.

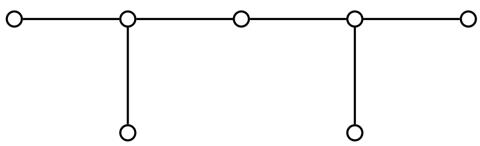


И така, $\alpha_2$ съотвества на три различни дървета.

3. $\alpha_3 = 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3$. Сега има два върха от степен 3 и един от степен 2. Може двата върха от степен 3 да са съседи, което означава, че като цяло те имат четири съседа, единият от които трябва да е върхът от степен 2. Дървото изглежда така.

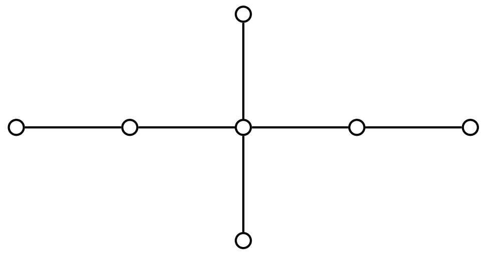


Може обаче двата върха от степен 3 да не са съседи. Тогава върхът от степен 2 е съсед и на двата, а дървото изглежда така.

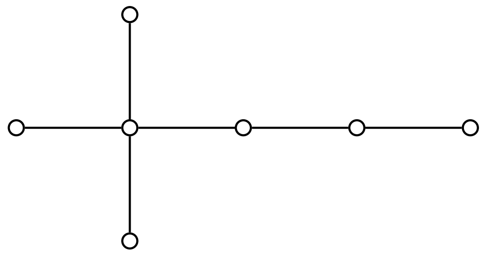


Други възможности няма. Видяхме, че $\alpha_3$ съответства на две неименувани дървета.

4. $\alpha_4 = 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4$. Сега има един връх от степен 4 и два от степен 2. Може върхът от степен 4 да е съсед и на двата върха от степен 2, при което дървото изглежда така.

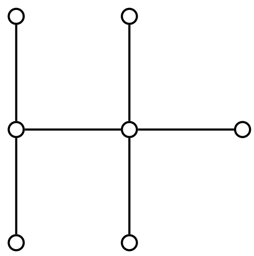


А може върхът от степен 4 да е съсед на само единия от върховете от степен 2. Тогава върхът от степен 4 е съсед на три от върховете от степен 1, двата върха от степен две са съседи и дървото изглежда така.



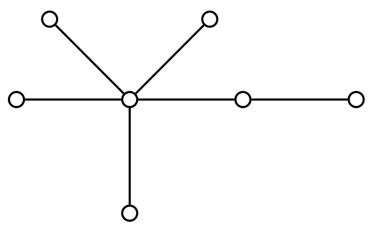
И така, $\alpha_4$ съответства на две неименувани дървета.

5. $\alpha_5 = 1, 1, 1, 1, 1, 3, 4$. Върховете от степени 3 и 4 задължително са съседи. Като цяло, те имат пет съседи, които може да са само върховете от степен 1. Дървото изглежда така.



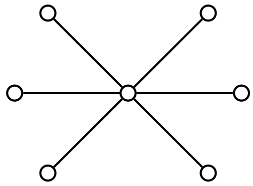
И така, $\alpha_5$ съответства на едно неименувано дърво.

6. $\alpha_6 = 1, 1, 1, 1, 1, 2, 5$. Върховете от степени 2 и 5 задължително са съседи, а всеки от петте върхове от степен 1 е съсед на точно един от тях. Дървото изглежда така.



И така, $\alpha_6$ съответства на едно неименувано дърво.

7. $\alpha_7 = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6$. Върхът от степен 6 е съсед на всеки от върховете от степен 1. Дървото изглежда така.



И така, $\alpha_7$ съответства на едно неименувано дърво.

Общо има $1 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 11$ неименувани дървета.