Задача 1 (1 т.)**.** Дайте определение на операцията разлика на множества A и B, която означаваме с $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

или

$$(\forall x)[x \in A \setminus B \;\leftrightarrow\; x \in A \;\wedge\; x \notin B].$$

Определение 1. За произволни множества A и B,

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Задача 2 (2 т.)**.** Докажете или дайте контрапример, че

$$A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B).$$

Решение. Ще разгледаме две подзадачи.

i) Нека $x \in A \cup B$. Имаме два случая.

а) $x \in A \cap B$. Тогава е очевидно, че $x \in (A \triangle B) \cup (A \cap B)$.

б) $x \notin A \cap B$, т.е. $x \notin A$ или $x \notin B$.

- $x \notin A$, но $x \in A \cup B$. Тогава

$$x \notin A \;\wedge (x \in A \vee x \in B) \;\Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \;\Rightarrow\; x \in B \setminus A.$$

Ясно е, че в този случай $x \in A \triangle B$.

- $x \notin B$, но $x \in A \cup B$. Тогава

$$x \notin B \;\wedge (x \in A \vee x \in B) \;\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \;\Rightarrow\; x \in A \setminus B.$$

Ясно е, че в този случай $x \in A \triangle B$.

И в двата случая получаваме, че $x \in A \triangle B \cup (A \cap B)$.

ii) Нека $x \in (A \triangle B) \cup (A \cap B)$. Отново разглеждаме два случая.

а) $x \in A \triangle B$. Тогава

$$x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A \;\Rightarrow\; x \in A \vee x \in B \;\Rightarrow\; x \in A \cup B.$$

б) $x \in A \cap B$. Тогава

$$x \in A \wedge x \in B \;\Rightarrow\; x \in A \vee x \in B \;\Rightarrow x \in A \cup B.$$

И в двата случая получаваме, че $x \in A \cup B$.

$\square$

Задача 3 (2 т.)**.** Докажете или дайте контрапример, че

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B).$$

Решение.

$$\begin{aligned}
x \in C \setminus (A \cup B) &\Leftrightarrow\ x \in C \ \wedge\ x \notin A \cup B \\
&\Leftrightarrow\ x \in C \ \wedge\ \neg(x \in A \vee x \in B) \\
&\Leftrightarrow\ x \in C \ \wedge\ x \notin A \ \wedge\ x \notin B \\
&\Leftrightarrow\ x \in C \ \wedge\ x \notin A \ \wedge\ x \in C \wedge\ x \notin B \\
&\Leftrightarrow\ x \in C \setminus A \ \wedge\ x \in C \setminus B \\
&\Leftrightarrow\ x \in (C \setminus A)\ \cap\ (C \setminus B)
\end{aligned}$$

□

Задача 4 (1 т.)**.** Докажете или дайте контрапример, че

$$A \setminus B = B \setminus A.$$

Решение. Например, нека $A = \{1, 2\}$ и $B = \{2\}$. Тогава $A \setminus B = \{1\}$, но $B \setminus A = \emptyset$. □

Задача 5 (1 т.)**.** Дайте определение на понятието функция $f : A \to B$.

$f : A \to B$ е изображение (или релация в $A \times B$), което съпоставя на всеки елемент от $a \in A$ *точно един* елемент от $b \in B$, който означаваме $b = f(a)$.

Задача 6 (2 т.)**.** Нека е дадена функцията $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, определена като:

$$f(x) = 2x + 1.$$

Нека е дадено множеството $A = \{2n + 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$. Намерете $f^{-1}(A)$.

Решение.

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbf{N} \mid f(x) \in A\} = \{x \in \mathbf{N} \mid f(x) \text{ е нечетно}\} = \mathbf{N}.$$

□

Задача 7 (2 т.)**.** Нека са дадени биективните функции $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Докажете или дайте контрапример, че

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
(g \circ f)^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow\ (g \circ f)(y) = x \\
&\Leftrightarrow\ g(f(y)) = x \\
&\Leftrightarrow\ (\exists z)[f(y) = z \ \wedge\ g(z) = x] \\
&\Leftrightarrow\ (\exists z)[f^{-1}(z) = y \ \wedge\ g^{-1}(x) = z] \\
&\Leftrightarrow\ (\exists z)[g^{-1}(x) = z \ \wedge\ f^{-1}(z) = y] \\
&\Leftrightarrow\ (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = y]
\end{aligned}$$

□

Контролно по ДС, спец. ИС, гр. 3, 05.11.2013 г.

Задача 1 (1 т.)**.** Дайте определение на множеството $\emptyset$.

$$(\forall x)[x \notin \emptyset]$$

или

$$\neg(\exists x)[x \in \emptyset].$$

Задача 2 (2 т.)**.** Докажете или дайте контрапример, че

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

Решение.

$$\begin{aligned}
x \in C \setminus (A \cap B) &\Leftrightarrow \ x \in C \ \vee \ x \notin A \cap B \\
&\Leftrightarrow \ x \in C \ \wedge \ \neg(x \in A \wedge x \in B) \\
&\Leftrightarrow \ x \in C \ \wedge \ (x \notin A \ \vee \ x \notin B) \\
&\Leftrightarrow \ (x \in C \ \wedge \ x \notin A) \ \vee \ (x \in C \wedge \ x \notin B) \\
&\Leftrightarrow \ x \in C \setminus A \ \vee \ x \in C \setminus B \\
&\Leftrightarrow \ x \in (C \setminus A) \ \cup \ (C \setminus B)
\end{aligned}$$

$\square$

За едно множество A, определяме $\mathscr{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$.

Задача 3 (1 т.)**.** Намерете $\mathscr{P}(\{\{\emptyset\}, \emptyset\})$.

Решение. $\mathscr{P}(\{\{\emptyset\}, \emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. $\square$

Задача 4 (2 т.)**.** Докажете или дайте контрапример, че

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Решение.

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \setminus C) &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \notin (B \setminus C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ \neg(x \in B \ \wedge \ x \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ (x \notin B \ \vee \ x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

$\square$

Задача 5 (1 т.)**.** Докажете или дайте контрапример, че $A \setminus B = \emptyset \ \leftrightarrow \ A \subseteq B$.

Решение.

$$\begin{aligned}
A \setminus B = \emptyset &\Leftrightarrow \ (\forall x)[x \notin A \setminus B] \\
&\Leftrightarrow \ (\forall x)[\neg(x \in A \ \wedge x \notin B)] \\
&\Leftrightarrow \ (\forall x)[x \notin A \ \vee x \in B] \\
&\Leftrightarrow \ (\forall x)[x \in A \ \rightarrow x \in B] \\
&\Leftrightarrow \ A \subseteq B
\end{aligned}$$

$\square$

Задача 6 (1 т.)**.** Нека е дадена функцията $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, определена като:

$$f(x) = |x|.$$

Нека е дадено множеството $A = \{2n + 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$. Намерете $f^{-1}(A)$.

Решение.

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= \{x \in \mathbf{Z} \mid f(x) \in A\} \\ &= \{x \in \mathbf{Z} \mid f(x) \in \mathbf{N} \text{ и е нечетно}\} \\ &= \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| \in \mathbf{N} \text{ и е нечетно}\} \\ &= \{2x + 1 \mid x \in \mathbf{Z} \ \wedge \ 2|x| + 1 \geq 0\} \\ &= \{2x + 1 \mid x \in \mathbf{Z}\} \end{aligned}$$

□

Задача 7 (2 т.)**.** Нека са дадени биективните функции $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Докажете или дайте контрапример, че функцията $g \circ f$ също е биективна.

Решение.

1. Ще докажем, че $g \circ f$ е инективна.

   Нека $x_1 \neq x_2$. Тогава

   $$f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2).$$

   Получаваме, че

   $$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) \neq g(y_2) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2).$$

   Следователно, $g \circ f$ е инективна.

2. Ще докажем ,че $g \circ f$ е сюрективна.

   Нека да вземем произволен елемент $z \in C$. Тогава съществува $y \in B$, такова че $g(y) = z$. Накрая, съществува $x \in A$, $f(x) = y$. Заключаваме, че

   $$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

□

Контролно по ДС, спец. ИС, гр. 1, 06.11.2013 г.

Задача 1 (2 т.). а) Вярно ли е, че $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$?

б) Вярно ли е, че $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$?

Решение.

а) Не.

б) Да.

$\square$

Задача 2 (2 т.). Докажете или дайте контрапример, че

$$A \cup B = B \ \leftrightarrow \ A \cap B = A.$$

Решение.

а) Нека $A \cup B = B$, т.е. $(\forall x)[x \in B \ \Leftrightarrow x \in A \cup B]$.
Нека $x \in A$. Тогава

$$x \in A \ \Rightarrow x \in A \cup B \ \Rightarrow \ x \in B.$$

Следователно, $x \in A \cap B$ и тогава $A \subseteq A \cap B$. Очевидно е, че $A \cap B \subseteq A$. Заключаваме, че $A = A \cap B$.

б) Нека $A \cap B = A$, т.е. $(\forall x)[x \in A \ \Leftrightarrow x \in A \cap B]$.
Очевидно е, че $B \subseteq A \cup B$. Да допуснем, че има елемент $x \in A \cup B$ и $x \notin B$. Тогава $x \in A$.

$$x \in A \ \Rightarrow \ x \in A \cap B \ \Rightarrow x \in B.$$

Достигаме до противоречие. Следователно, $A \cup B \subseteq B$. Заключаваме, че $A = A \cup B$.

$\square$

Задача 3 (1 т.). Докажете или дайте контрапример, че $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

Решение. Използваме, че:

$$p \wedge (\neg p \vee q) \ \leftrightarrow \ (p \wedge \neg p) \ \vee (p \wedge q) \ \leftrightarrow p \wedge q.$$

В нашата задача, $p = x \in A$, $q = x \notin B$. Тогава

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B \ &\Leftrightarrow \ x \in A \ \wedge \ x \notin B \\ &\Leftrightarrow \ x \in A \ \wedge \ (x \notin A \ \vee \ x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \notin (A \cap B) \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus (A \cap B). \end{aligned}$$

$\square$

Задача 4 (1 т.)**.** Докажете или дайте контрапример, че

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

Решение. Да вземем множества $A = B = C \neq \emptyset$. Тогава $B \setminus C = \emptyset$ и $A \setminus (B \setminus C) = A$, но $A \setminus B = \emptyset$ и $(A \setminus B) \setminus C = \emptyset$. $\square$

Задача 5 (1 т.)**.** Нека $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ е определена като

$$f(x) = x^2.$$

Нека $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Намерете $f^{-1}(A)$.

Решение. $f^{-1}(A) = \{-1, 1, -2, 2\}$. $\square$

Задача 6 (1 т.)**.** Нека е дадена функция $f : A \to B$. Докажете или дайте контрапример, че $(\forall X, Y \subseteq B)[f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \setminus Y)]$.

Решение.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y) &\Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(X)\ \wedge\ x \notin f^{-1}(Y) \\ &\Leftrightarrow f(x) \in X\ \wedge f(x) \notin Y \\ &\Leftrightarrow f(x) \in X \setminus Y \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(X \setminus Y) \end{aligned}$$

$\square$

Задача 7 (2 т.)**.** Докажете или дайте контрапример, че за произволни функции $f : A \to B$ и $g : B \to C$, ако $g \circ f$ е сюрективна, то g е сюрективна.

Решение. Нека $z \in C$. Ще покажем, че съществува $y \in B$, $g(y) = z$. Щом $g \circ f$ е сюрективна, то съществува $x \in A$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z.$$

Тогава за това $y = f(x)$ имаме, че $g(y) = z$. Следователно, g е сюрективна. $\square$