Примерни решения на домашно № 1, 19 март 2023 г.

Задача 1: Нека $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ и нека

$$X = \{\{a, d\}, \{b, c, e\}, \{f, g, h\}\}$$
$$Y = \{\{f, h\}, \{a, b, c, d, e, g\}\}$$

2 т. Напишете в явен вид множеството $\{C \cap D \,|\, C \in X \wedge D \in Y\} \setminus \{\emptyset\}$.

23 т. Сега допуснете, че A е произволно непразно множество и X и Y са произволни разбивания на A. Докажете, че $\{C \cap D \,|\, C \in X \wedge D \in Y\} \setminus \{\emptyset\}$ е разбиване на A.

Решение: Първо ще намерим $\{C \cap D \,|\, C \in X \wedge D \in Y\} \setminus \{\emptyset\}$ за примерното $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ и неговите разбивания $X = \{\{a, d\}, \{b, c, e\}, \{f, g, h\}\}$ и $Y = \{\{f, h\}, \{a, b, c, d, e, g\}\}$.

- Когато $C = \{a, d\}$ и $D = \{f, h\}$, $C \cap D = \emptyset$.
- Когато $C = \{a, d\}$ и $D = \{a, b, c, d, e, g\}$, $C \cap D = \{a, d\}$.
- Когато $C = \{b, c, e\}$ и $D = \{f, h\}$, $C \cap D = \emptyset$.
- Когато $C = \{b, c, e\}$ и $D = \{a, b, c, d, e, g\}$, $C \cap D = \{b, c, e\}$.
- Когато $C = \{f, g, h\}$ и $D = \{f, h\}$, $C \cap D = \{f, h\}$.
- Когато $C = \{f, g, h\}$ и $D = \{a, b, c, d, e, g\}$, $C \cap D = \{g\}$.

Тогава

$$\begin{aligned}\{C \cap D \,|\, C \in X \wedge D \in Y\} &= \{\emptyset, \{a, d\}, \emptyset, \{b, c, e\}, \{f, h\}, \{g\}\} \\ &= \{\emptyset, \{a, d\}, \{b, c, e\}, \{f, h\}, \{g\}\}\end{aligned}$$

Тогава

$$\{C \cap D \,|\, C \in X \wedge D \in Y\} \setminus \{\emptyset\} = \{\{a, d\}, \{b, c, e\}, \{f, h\}, \{g\}\}$$

Сега ще покажем, че за произволно A и произволни негови разбивания X и Y е вярно, че $\{C \cap D \,|\, C \in X \wedge D \in Y\} \setminus \{\emptyset\}$ е разбиване на A. Нека $Z = \{C \cap D \,|\, C \in X \wedge D \in Y\} \setminus \{\emptyset\}$.

1. Всеки елемент на Z е подмножество на A, защото всяко C е подмножество на A, бивайки елемент на разбиването X, и всяко D е подмножество на A, бивейки елемент на разбиването Y, откъдето следва, че всяко сечение $C \cap D$ в $\{C \cap D \,|\, C \in X \wedge D \in Y\}$ е подмножество на A.

2. Всеки елемент на Z е непразно множество, понеже изваждаме $\{\emptyset\}$ от $\{C \cap D \,|\, C \in X \wedge D \in Y\}$, за да получим Z.

3. За всяко $a \in A$

   - съществува точно едно $C' \in X$, такова че $a \in C'$, понеже X е разбиване на A, и
   - съществува точно едно $D' \in Y$, такова че $a \in D'$, понеже Y е разбиване на A.

   Оттук следва, че сечението $C' \cap D'$ съдържа a, а също така и че (C', D') е единствената двойка множества-елемент на $X \times Y$, чието сечение съдържа a. Тогава a се съдържа в едно единствено множество-елемент на $\{C \cap D \,|\, C \in X \wedge D \in Y\}$, а именно $C' \cap D'$. Нещо повече – множеството $C' \cap D'$ е непразно, понеже съдържа a, така че изваждането на $\{\emptyset\}$ от $\{C \cap D \,|\, C \in X \wedge D \in Y\}$ не го засяга. Тогава Z съдържа точно един елемент-множество, който съдържа a като елемент.

   Но a е произволен елемент на A. Заключаваме, че за всеки елемент $x \in A$ съществува точно едно множество-елемент на Z, което съдържа x.

От 1., 2. и 3. заключаваме, че Z е разбиване на A.

Задача 2: Докажете по индукция, че 10 дели $n^5 - n$ за всяко естествено n.

Решение: Ще докажем твърдението със силна индукция по n.

База: $n = 0$. Твърдението става "10 дели $0^5 - 0$", което очевидно е вярно.

Индуктивно предположение: Да допуснем, че твърдението е вярно за стойности на аргумента $0, 1, \ldots, n-1, n$, за някое $n \in \mathbb{N}$.

Индуктивна стъпка: Ще докажем, че 10 дели $(n+1)^5 - (n+1)$. В сила е

$$
\begin{aligned}
&(n+1)^5 - (n+1) = ((n-1)+2)^5 - ((n-1)+2) = \\
&(n-1)^5 + 10(n-1)^4 + 40(n-1)^3 + 80(n-1)^2 + 80(n-1) + 32 - (n-1) - 2 = \\
&((n-1)^5 - (n-1)) + 10(n-1)^4 + 40(n-1)^3 + 80(n-1)^2 + 80(n-1) + 30 = \\
&((n-1)^5 - (n-1)) + 10((n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 8(n-1)^2 + 8(n-1) + 3) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Но от индуктивното предположение знаем, че 10 дели $(n-1)^5 - (n-1)$, така че имаме право да запишем $(n-1)^5 - (n-1)$ като $10m$, където m е някое естествено число. Тогава преписваме (1) така:

$$
\begin{aligned}
&10m + 10((n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 8(n-1)^2 + 8(n-1) + 3) = \\
&10(m + (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 8(n-1)^2 + 8(n-1) + 3)
\end{aligned}
$$

Но $m + (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 8(n-1)^2 + 8(n-1) + 3$ е цяло число, така че $10(m + (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 8(n-1)^2 + 8(n-1) + 3)$ е кратно на 10. Доказахме, че 10 дели $(n+1)^5 - (n+1)$.

Една забележка. Строго формално, доказателството в този вид е непълно. Да кажем, че предикатът, който доказваме, е $Q(\,)$. В индуктивната стъпка доказахме $Q(n+1)$, използвайки допускането $Q(n-1)$. Но това допускане е едно от допусканията $Q(0)$, $Q(1)$, ..., $Q(n)$. Ерго, $n-1$ трябва да е елемент на $\{0, 1, \ldots, n\}$, където n е произволно естествено число. Но 0 е естествено число, което означава, че е възможна стойност на n. Ако $n = 0$, $n-1$ става -1. А ние нямаме $Q(-1)$. Изход от това е да докажем втора база за $n = 1$, което е елементарно, понеже очевидно 10 дели $1^5 - 1 = 0$, след което допусканията са $Q(1)$, $Q(2)$, ..., $Q(n)$, като $n \in \mathbb{N}^+$, и пак доказваме $Q(n+1)$, ползвайки допускането $Q(n-1)$.

Задача 3: Разгледайте безкрайната редица от суми

$$\frac{1}{1 \times 2},$$
$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3},$$
$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4},$$
$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5},$$
$$\ldots$$

1 т. • Намерете точните стойности на четирите горепосочени суми.

1 т. • Направете хипотеза за стойността на n-тата сума.

23 т. • Докажете по индукция тази хипотеза.

Решение: Четирите суми са следните

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{15}{20} + \frac{1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

n-тата сума е

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)}$$

Естествено е да предположим, че нейната стойност е $\frac{n}{n+1}$.

Сега ще докажем по индукция по n, че

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \times (i+1)} = \frac{n}{n+1} \tag{2}$$

База: Нека $n = 1$. Лявата страна на (2) е $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i \times (i+1)}$. Но това е $\frac{1}{1 \times (1+1)} = \frac{1}{2}$. Дясната страна на (2) е $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Виждаме, че лявата страна на (2) е равна на дясната страна на (2) при $n = 1$.

Индуктивно предположение: Нека за някое цяло положително n е вярно, че

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \times (i+1)} = \frac{n}{n+1} \tag{3}$$

Индуктивна стъпка: Ще докажем, че

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i \times (i+1)} = \frac{n+1}{n+2} \tag{4}$$

Разглеждаме лявата страна на (4):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i \times (i+1)} = \qquad // \text{ свойство на } \sum \\
&\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \times (i+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \qquad // \text{ индуктивното предположение} \\
&\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\
&\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\
&\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \\
&\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \\
&\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \\
&\frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

Но това е дясната страна на (4). Доказахме, че (3) влече (4).

Задача 4: Представете си игра, в която се редуват двама играчи А и Б. На масата са n сложени камъчета, които за целите на играта са идентични, и всеки играч, когато е неговият или нейният ред, взема или едно, или две, или три камъчета. Камъче, което е взето, повече не се връща на масата. Играчът, който/която вземе последен/последна, губи. Първо играе А. Докажете със силна индукция по n, че има печеливша стратегия за А тогава и само тогава, когато $n \not\equiv 1 \pmod 4$.

Решение: Нека $n \in \mathbb{N}^+$. Нека $P(n)$ е следният предикат:

> Ако $n = 4m + 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$, то няма печеливша стратегия за А, в противен случай има печеливша стратегия за А.

Ще докажем $P(n)$ със силна индукция по n.

База: $n = 1$. От една страна, очевидно ситуацията с едно единствено налично камъче е губеща за А. От друга страна, тъй като 1 е от вида $4m + 1$, предикатът казва, че няма печеливша стратегия за А. Доказахме базовия случай.

Индуктивно предположение: Да допуснем $P(k)$ за $1 \leq k \leq n$.

Индуктивна стъпка: Ще докажем $P(n + 1)$. Разглеждаме четири случаи.

- Нека $n+1$ е от вида $4m$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$. Тогава А взема точно 3 камъчета и Б играе с $4m-3$ камъчета. Тъй като n е поне 4, числото $4m-3$ е поне 1 и е от вида $4k + 1$ за някое естествено k. От индуктивното предположение знаем, че тази ситуация е губеща за играча, който/която е на ход. Следователно, ситуацията е губеща за Б, което означава, че е печеливша за А.

- Нека $n + 1$ е от вида $4m + 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$. Вече разгледахме случая с аргумент 1, така че можем да допуснем $n + 1 \geq 5$. А може да вземе или едно, или две, или три камъчета.

  - Ако А вземе едно камъче, остават n камъчета за Б. Но $n = 4m$ в текущия контекст. От индуктивното предположение знаем, че при $4m$ камъчета има печеливша стратегия за играча, който/която е на ход. Следователно, ситуацията е печеливша за Б, което означава, че е губеща за А.
  - Ако А вземе две камъчета, остават $n-1$ камъчета за Б. Но $n-1 = 4m-1$ в текущия контекст. Тъй като n е поне 4, числото $n-1 = 4m-1$ е поне 3 и е от вида $4k+3$ за някое естествено k. От индуктивното предположение знаем, че при $4k + 3$ камъчета има печеливша стратегия за играча, който/която е на ход. Следователно, ситуацията е печеливша за Б, което означава, че е губеща за А.
  - Ако А вземе три камъчета, остават $n-2$ камъчета за Б. Но $n-2 = 4m-2$ в текущия контекст. Тъй като n е поне 4, числото $n-2 = 4m-2$ е поне 2 и е от вида $4k+2$ за някое естествено k. От индуктивното предположение знаем, че при $4k + 2$ камъчета има печеливша стратегия за играча, който/която е на ход. Следователно, ситуацията е печеливша за Б, което означава, че е губеща за А.

- Нека $n+1$ е от вида $4m+2$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$. Тогава А взема точно 1 камъче и Б играе с $4m+1$ камъчета. От индуктивното предположение знаем, че тази ситуация е губеща за играча, който/която е на ход. Следователно, ситуацията е губеща за Б, което означава, че е печеливша за А.

- Нека $n+1$ е от вида $4m+3$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$. Тогава А взема точно 2 камъчета и Б играе с $4m+1$ камъчета. От индуктивното предположение знаем, че тази ситуация е губеща за играча, който/която е на ход. Следователно, ситуацията е губеща за Б, което означава, че е печеливша за А.