Планарни графи.

Минко Марков

18 ноември 2013 г.

Изложението е базирано донякъде на изложението на планарност на графи в [Gib85].

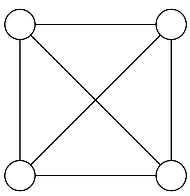
1 Планарни вписвания на графи.

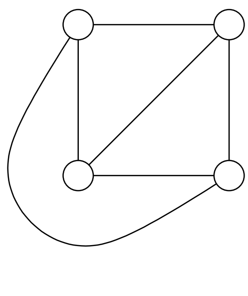
Тъй като по отношение на планарността множествените ребра, ориентацията на ребрата и наличието на примки нямат значение, а свързаните компоненти могат да се разглеждат една след друга, ще разглеждаме неориентирани (крайни) свързани графи без множествени ребра и примки, освен ако изрично не кажем обратното. Нека $G = (V, E)$ е граф, където $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. *Планарно вписване* на G, ако изобщо съществува, е съвкупността от:

- множество $\mathcal{V} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ точки в Евклидовата равнина, наречени *планарни върхове*. Нека f е биекция $f : V \to \mathcal{V}$.
- множество прости отворени криви $\mathcal{E} = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$, наречени *планарни ребра*, всяко от които свързва два планарни върха. Следните две условия са изпълнени:
  - съществува биекция $g : E \to \mathcal{E}$, такава че $\forall e \in E$, x и y са краищата на e в графа тогава и само тогава, когато $f(x)$ и $f(y)$ са краищата на $g(e)$ в равнината.
  - планарните ребра не се пресичат, освен може би в крайните си точки.

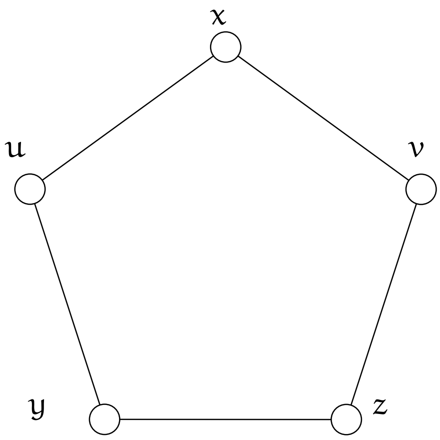
Както ще докажем след малко, не всеки граф има планарно вписване. Графите, които имат планарно вписване, се наричат *планарни графи*. Полу-формално казано, граф е планарен, ако може да бъде нарисуван в равнината така, че кривите, съответстващи на ребрата, да не се пресичат (освен евентуално в общи краища).

Това, че някой граф е нарисуван с пресичане на (планарните си) ребра не означава, че няма друг начин да бъде нарисуван, който отговаря на изискванията за планарно вписване. Примерно, ето две рисунки на K_4, като в лявата има пресичане на ребра, следователно тя не съответства на планарно вписване, а в дясната съответства на планарно вписване:

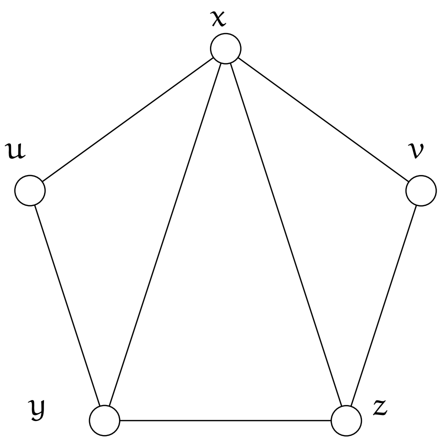




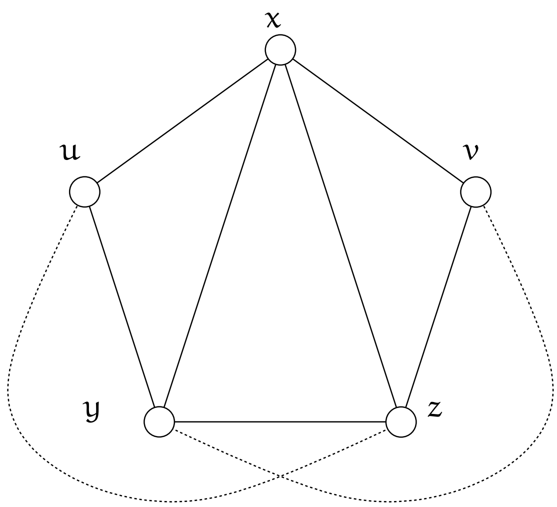
Въпросът дали даден граф е планарен или не, тоест дали може да се нарисува в равнината без пресичане на ребра или не, не е тривиален. Следният пример показва това. Известно е, че K_5 не е планарен граф—факт, който ще докажем след малко—а графът $K_5 - e$ е планарен, където "$K_5 - e$" означава K_5 без кое да е ребро. Да се опитаме да нарисуваме $K_5 - e$ без пресичане на планарни ребра, като първо сложим периферия от 5 планарни ребра:



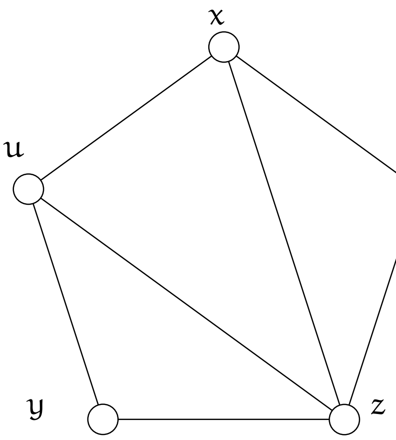
и после сложим още 4 планарни ребра-диагонали. За определеност, нека липсващото ребро е между върховете u и v. Ако първо сложим планарните ребра (x, y) и (x, z) като диагонали:



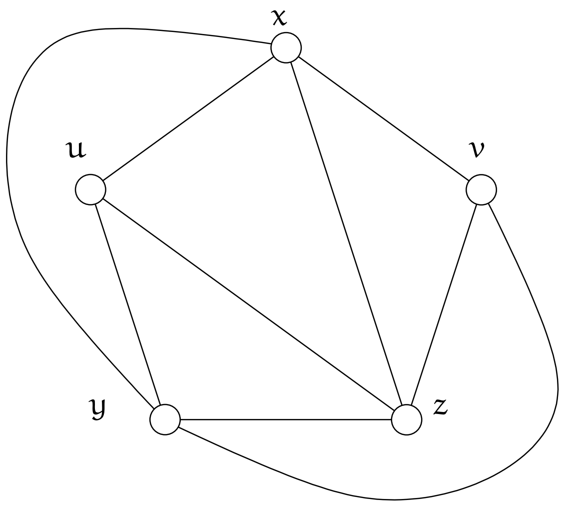
очевидно няма как да сложим останалите две планарни ребра (u, z) и (v, y) без пресичане на планарни ребра:



Ако обаче започнем с (u, z) и (x, z) като диагонали:



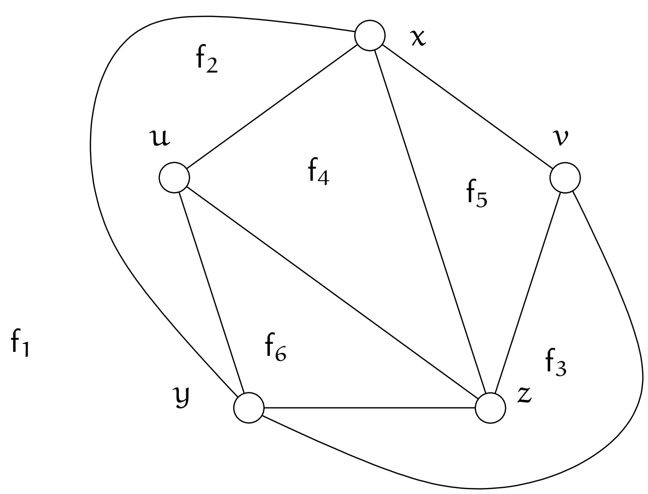
можем да добавим и останалите (x, y) и (y, v) без пресичане:



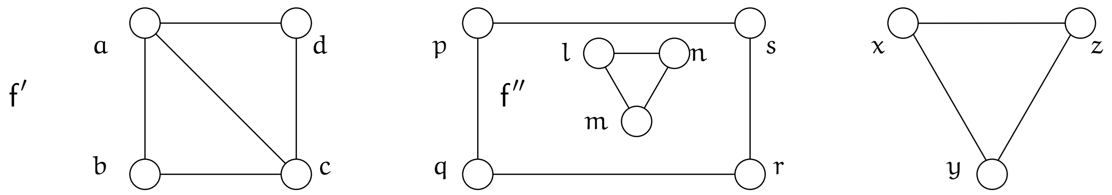
2 Лица на планарните вписвания.

Определение 1. *Нека* G *е планарен граф и* $\mathcal{G}$ *е някое негово планарно вписване. Да махнем от равнината всички планарни върхове и ребра. Тази операция води до разпадането на равнината на свързани райони, които наричаме* лицата *на* $\mathcal{G}$. *Точно едно от лицата е неограничено – това е* външното лице, *а останалите са* вътрешните лица.

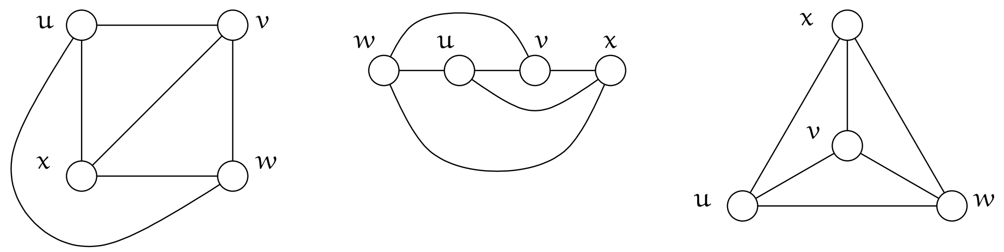
Примерно, следното планарно вписване на $K_5 - e$ има лица $f_1, \ldots, f_6$. Външното лице е f_1:



Очевидно е, че при вписванията на свързани планарни графи, всяко лице има точно един *ограждащ цикъл*[†]. Ограждащият цикъл е цикълът от точно тези планарни ребра и върхове, които участват в границата на лицето. В последния пример, ограждащият цикъл на f_1 е цикълът (x, y, v, x). Надолу ще видим, че ограждащият цикъл може да е прост или да не е прост. При несвързаните планарни графи, едно лице може да има няколко ограждащи цикъла. Като пример да разгледаме следното планарно вписване на граф с четири свързани компоненти. Лицето f' има 3 ограждащи цикъла: (a, b, c, d, a), (p, q, r, s, p) и (x, y, z, x), а лицето f'' има два ограждащи цикъла (p, q, r, s, p) и (l, m, n, l):



Дефиницията на планарно вписване говори за точки и криви в равнината, а това са геометрични понятия. Ние ще гледаме на планарните вписвания не на ниво геометрия, а на по-високо ниво[‡]. Конкретните координати на планарните върхове и конкретните форми на планарните ребра няма да ни интересуват. Следните три планарни вписвания на K_4 ще считаме за еквивалентни, тоест едно и също вписване, нарисувано по три различни начина:



Всяка от тези три рисунки може да се получи от коя да е друга чрез непрекъсната (континуална) трансформация – "плъзгане" на планарен връх в равнината и съответна модификация на планарните ребра, такава че в нито един момент планарните ребра не се пресичат.

С други думи, на лицата няма да гледаме като на конкретни геометрични фигури, а по-общо, като на цикли, но цикли в дадена *посока*. Да изберем една посока на въртене в равнината, примерно обратната на часовниковата стрелка. Тогава всяко лице описваме чрез изреждане на върховете на ограждащия го цикъл във вече избраната посока[§]. Дали посоката е по или срещу часовниковата стрелка е без значение, важното е за всички лица посоката да е една и съща. Всяко планарно вписване ще считаме за определено, ако за всяко лице е казано кой е ограждащият го цикъл (описан в избраната посока). За простота ще считаме, че лице и неговият ограждащ цикъл са синоними.

Такова описание на вписването не е геометрично, а е чисто *комбинаторно*. Да направим конкретна рисунка с конкретна геометрия на точките и линиите от комбинаторно описание би било задача на изчислителната геометрия. Още един пример – планарното вписване на

[†] Това е в сила и за свързаните планарни мултиграфи с примки.

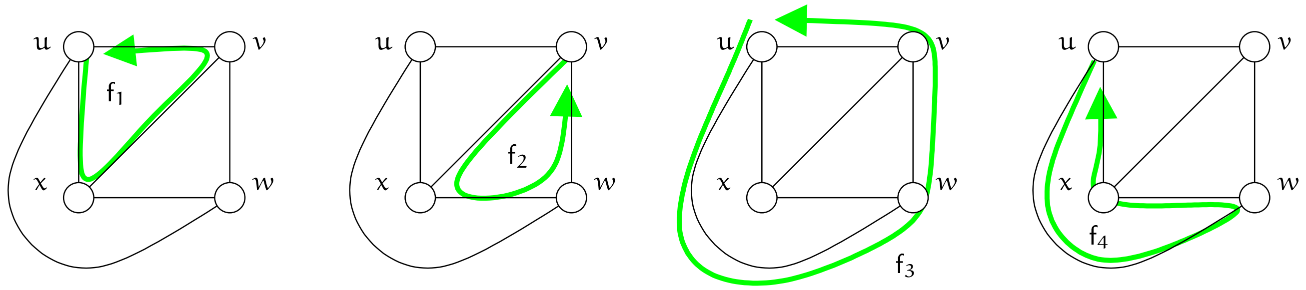
[‡] По-високото ниво е топологията.

[§] Ако не използваме термина "цикъл", можем да кажем неформално, че за всяко лице описанието е последователността от върхове, които би видяло "двумерно същество" (живеещо в равнината), което обикаля систематично дадено лице по границата в избраната посока, докато не се върне там, откъдето е започнало обиколката.

$K_4 = \big(\{u, v, w, x\}, \{(u, v), (u, w), (u, x), (v, w), (v, x), (w, x)\}\big)$ се идентифицира чрез четирите си лица:

$$f_1 = (u, x, v, u)$$
$$f_2 = (v, x, w, v)$$
$$f_3 = (u, w, x, u)$$
$$f_4 = (u, w, v, u)$$

За да се убедим, че лицата имат такива описания, да ги разгледаме подробно едно по едно:



Дали в описанието на лицата ще записваме началния връх два пъти, както правим тук, или веднъж, примерно $f_1 = (u, x, v)$, не е съществено, а е въпрос на избор.

Заслужава да се отбележи, че по отношение на комбинаторното описание на вписванията, външното лице не се отличава от другите лица по нищо. Тоест, ако искаме от комбинаторното описание да направим геометрично описания, можем да изберем което искаме лице за външно. Този факт има и друга интерпретация. Планарните графи са точно графите, които могат да бъдат вписани в сфера – това се доказва тривиално със стереографска проекция[†] между равнината и сфера. Тъй като върху сфера за външно лице не може да се говори, очевидно външното лице в равнината не е съществено различно от другите лица и всяко лице от сферичното вписване може да бъде проектирано върху външно лице в равнината при подходяща стереографска проекция.

Читателят може да остане с впечатлението, че:

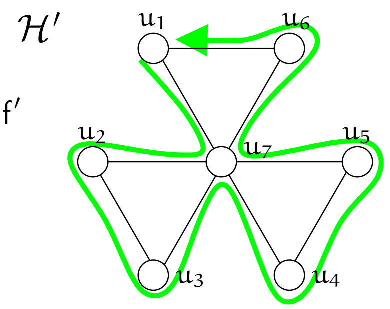
1. за всеки планарен граф, лицата са винаги еднакъв брой,

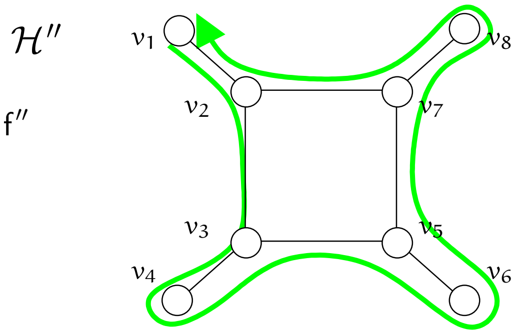
2. за всеки планарен граф, лицата са винаги едни и същи, и

3. лицата винаги имат прости ограждащи цикли.

Както ще видим, първото от тези твърдения е вярно, а второто и третото, не. Да разгледаме третото твърдение. Всяко лице има *прост* ограждащ цикъл тогава и само тогава, когато графът има поне три върха и няма срязващи върхове. Ще оставим този факт без доказателство, като само ще дадем два примера за планарни графи H' и H'', всеки от които има поне един срязващ връх. Ще нарисуваме планарните им вписвания, $\mathcal{H}'$ и $\mathcal{H}''$ с външни лица съответно f' и f''.

[†]Виж `http://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection`



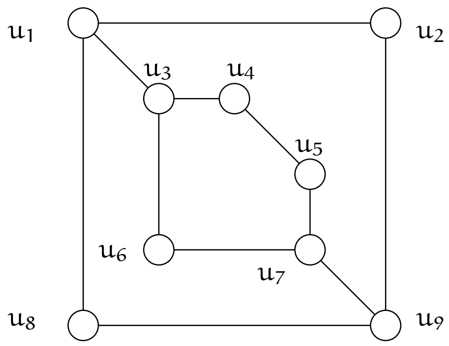


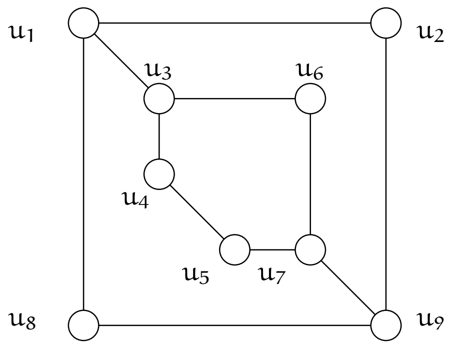
Очевидно

$$f' = (u_1, u_7, u_2, u_3, u_7, u_4, u_5, u_7, u_6, u_1)$$
$$f'' = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_3, v_5, v_6, v_5, v_7, v_8, v_7, v_2, v_1)$$

тоест ограждащите ги цикли не са прости.

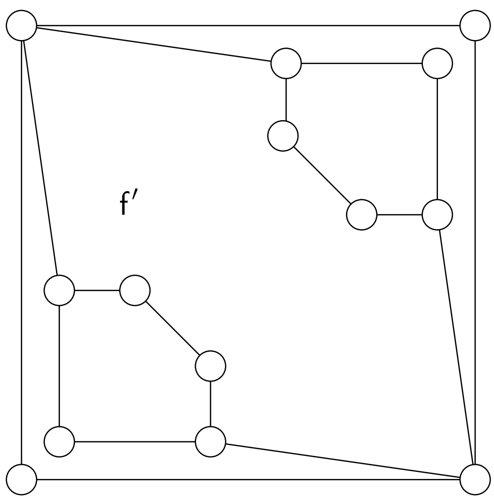
Сега ще покажем, че на един и същи планарен граф може да съответстват различни планарни вписвания. При това, различни не като геометрия, а като комбинаторни описания на лицата. Да разгледаме следните две планарни вписвания на един и същи планарен граф:

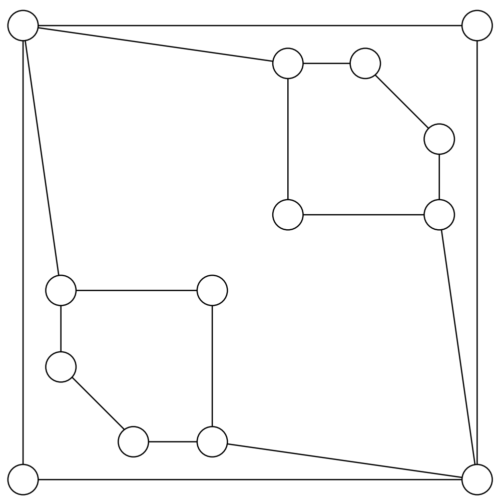




За да се убедим, че вписванията са различни, достатъчно е да забележим, че във вписването отляво има лице, в което присъстват u_8 и u_6, а във вписването отдясно няма такова лице.

Последният пример показва различни вписвания на един и същи граф, но едното от тях може да бъде получено от другото чрез преименуване на върхове: ако разменим местата на имената u_2 и u_8 във вписването вдясно, ще получим вписването вляво. Може да се дадат примери за различни вписвания на един и същи граф, които не могат да бъдат получени едно от друго чрез просто преименуване, примерно:





Графът е един и същ и в двете двете вписвания, и броят на лицата е 6, но вписването вляво има лице f' с 10 върха, а нито едно от шестте лица вдясно не е с 10 върха.

Показахме, че лицата може да съответстват на цикли, които не са прости, както и че един и същи планарен граф може да има различни планарни вписвания. Сега ще покажем, че броят на лицата е инвариантен по отношение на избора на вписване.

3 Формула на Euler. Следствия от формулата на Euler.

Теорема 1 (Euler)**.** *За всеки свързан планарен мултиграф* G *с* n *върха и* m *ребра е вярно, че всяко планарно вписване на* G *има един и същи брой лица, да речем* f *лица, като е изпълнено*

$$n - m + f = 2 \tag{1}$$

Доказателство: Да разгледаме произволно вписване $\mathcal{G}$ на G. Щом G е свързан, той има поне едно покриващо дърво D. Да разгледаме планарното вписване $\mathcal{D}$ на D, индуцирано от $\mathcal{G}$. Очевидно D има $n-1$ ребра, а $\mathcal{D}$ има точно едно лице и $n-1$ планарни ребра.

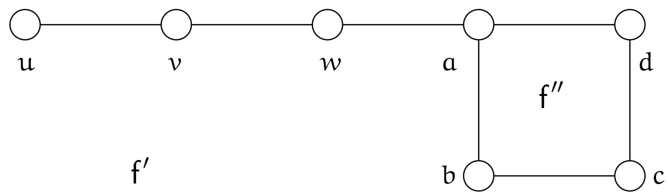
D се получава от G чрез премахване на $m-(n-1) = m-n+1$ ребра – факт, който лесно може да бъде доказан чрез изследване на процедура, която последователно премахва ребра, участващи в цикли, докато не остане свързан граф без цикли, тоест дърво. Аналогично, $\mathcal{D}$ се получава от $\mathcal{G}$ чрез премахване на $m-n+1$ планарни ребра. При всяко премахване на планарно ребро, точно две лица на вписването се сливат в точно едно лице, значи броят на лицата намалява с единица. Тъй като $\mathcal{D}$ има едно лице, следва, че $\mathcal{G}$ има точно

$$\underbrace{1}_{\text{броят на лицата на } \mathcal{D}} + \underbrace{m-n+1}_{\text{броят на премахнатите ребра от } \mathcal{G}} = m-n+2$$

лица. Тъй като този резултат не зависи от избора на планарно вписване, следва че броят на лицата $f = m-n+2$ е инварианта на графа, независеща от конкретното вписване. Щом $f = m-n+2$, очевидно $n-m+f=2$. □

Определение 2. *За всяко планарно вписване* $\mathcal{G}$ *на произволен планарен граф* G*, за всяко лице* t *на* $\mathcal{G}$*,* степента на t *е дължината на цикъла, ограждащ* t*. Степента на* t *бележим с* $d(t)$*.* □

Като пример ще разгледаме степените на двете лица f' и f'' в следното вписване:



Степента на f'' е очевидно 4. Степента на f' е 10, тъй като ограждащият цикъл $(u, v, w, a, b, c, d, a, w, v, u)$, който не е прост, има дължина 10.

Лема 1. *За всеки планарен (мулти) граф* G *с* m *ребра, ако* $\mathcal{G}$ *е произволно планарно вписване на* G *с* f *на брой лица* t_1*,* t_2*, …,* t_f*, в сила е:*

$$\sum_{i=1}^{f} d(t_i) = 2m$$

Доказателство: Всяко ребро се брои точно два пъти при сумирането на степените на лицата. $\square$

Теорема 2. *За всеки планарен (не мулти) граф* G*, може и да не е свързан, с поне две ребра, ако* n *е броят на върховете и* m *е броят на ребрата, то*

$$m \leq 3n - 6$$

Доказателство: Нека G е свързан – ако не е свързан, доказваме неравенството за свързаните компоненти и сумираме по компонентите. И така, G е свързан планарен граф. Нека лицата са f на брой, наречени t_1, t_2, $\ldots$, t_f. Имаме:

$$\begin{aligned}
n - m + f &= 2 \qquad \text{съгласно Теорема 1} \\
n - 2 &= m - f \qquad \text{очевидно} \\
3n - 6 &= 3m - 3f \qquad \text{очевидно} \\
3n - 6 &= m + 2m - 3f \qquad \text{очевидно} \\
3n - 6 &= m + \sum_{i=1}^{f} d(t_i) - 3f \qquad \text{Съгласно Лема 1}
\end{aligned}$$

Забележете, че $\sum_{i=1}^{f} d(t_i) - 3f$ е неотрицателно количество за всеки планарен граф с поне две ребра, защото всяко лице има ограждащ цикъл с дължина поне 3, тоест $d(t_i) \geq 3$ за всяко i. Щом $\sum_{i=1}^{f} d(t_i) - 3f \geq 0$, следва, че $3n - 6 \geq m$. $\square$

Горната граница $3n - 6$ за броя на ребрата е достижима. Всеки планарен граф с поне три върха, за който $m < 3n - 6$, има поне едно лице от степен ≥ 4. *Триангулиране* е процедура, която взема като вход произволно планарно вписване, в което има лице от степен ≥ 4, и във всяко лице от степен ≥ 4 слага по произволен начин ребра между несъседни върхове, докато това лице се "раздроби" на лица от степен 3. Изходът от триангулирането е планарно вписване, в което всяко лице е от степен 3. Такива планарни вписвания се наричат *триангулации*. При триангулациите имаме $m = 3n - 6$.

Следствие 1. K_5 *не е планарен граф.*

Доказателство: Директно от Теорема 2: K_5 има 10 ребра, 5 върха, и $10 \not\leq 3.5 - 6$. $\square$

Теорема 3. *За всеки планарен (не мулти) двуделен граф* G *с поне две ребра, ако* n *е броят на върховете и* m *е броят на ребрата, то*

$$m \leq 2n - 4$$

Доказателство: Нека G е свързан – ако не е свързан, доказваме неравенството за свързаните компоненти и сумираме по компонентите. И така, G е свързан планарен двуделен граф.

Нека лицата са f на брой, наречени t_1, t_2, …, t_f. Имаме:

$$\begin{aligned}
n - m + f = 2 &\quad \text{съгласно Теорема 1}\\
n - 2 = m - f &\quad \text{очевидно}\\
2n - 4 = 2m - 2f &\quad \text{очевидно}\\
2n - 4 = m + \frac{2m - 4f}{2} &\quad \text{очевидно}\\
2n - 4 = m + \frac{\sum_{i=1}^{f} d(t_i) - 4f}{2} &\quad \text{Съгласно Лема 1}
\end{aligned}$$

Забележете, че $\sum_{i=1}^{f} d(t_i) - 4f$ е неотрицателно количество за всеки планарен двуделен граф с поне две ребра, защото всяко лице има ограждащ цикъл с дължина поне 4, тоест $d(t_i) \geq 4$ за всяко i. Щом $\sum_{i=1}^{f} d(t_i) - 4f \geq 0$, следва, че $2n - 4 \geq m$. $\square$

Следствие 2. $K_{3,3}$ *не е планарен граф.*

Доказателство: Директно от Теорема 3: $K_{3,3}$ има 9 ребра, 6 върха, и $9 \not\leq 2.6 - 4$. $\square$

Определение 3 (подразделяне, свиване). *Нека* $G = (V, E)$ *е произволен граф и* $e = (v, w)$ *е произволно ребро в* G. Подразделянето на e[†] *е трансформирането на* G *в*

$$G' = \big(V \cup \{u\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{(v, u), (u, w)\}\big)$$

където u *е връх, такъв че* $u \notin V$.

Обратната операция на подразделянето е свиване на две ребра чрез връх от степен 2[‡]. *Нека* x *е произволен връх от степен* 2 *в* G*, такъв че ако* y *и* z *са съседите на* x*, то* $(y, z) \notin E$. *Нека* $e_1 = (y, x)$ *и* $e_2 = (x, z)$. *Свиването на двете ребра* e_1 *и* e_2 *чрез връх* x*, или просто* свиването на x*, е транформирането на* G *в*

$$G'' = \big(V \setminus \{x\}, (E \setminus (\{e_1\} \cup \{e_2\})) \cup \{e_3\}\big)$$

където e_3 *е ребро с краища* y *и* z*, такова че* $e_3 \notin E$. $\square$

В определението на свиване на ребро искаме двата съседа y и z на x да не са съседи помежду си преди свиването. Без това ограничение може да имаме проблем: ако y и z са съседи преди свиването и реброто между тях е e', след свиването ще имаме две ребра, e' и e_3, между y и z:

Ако допускаме мултиграфи, проблем няма, степените на y и z са същите като преди свиването и броят на лицата—ако говорим за планарно вписване—остава същият. Но обикновено в приложенията на тази теория говорим за не-мулти графи, следователно всяко ребро се

[†] На английски терминът е *egde subdivision*.

[‡] На английски терминът е *edge contraction through a vertex of degree* 2.

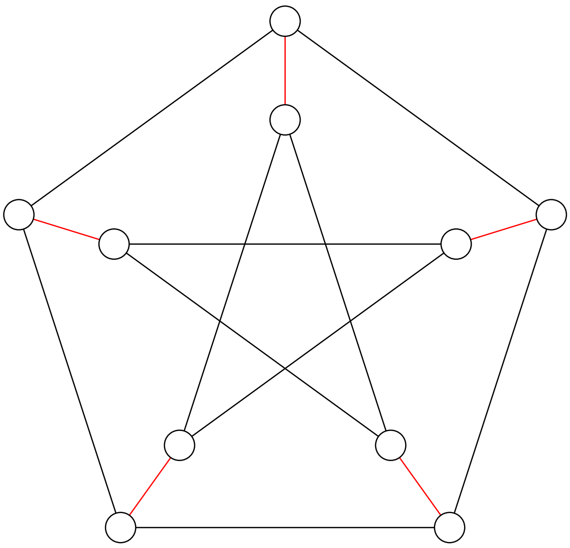
идентифицира с краищата си. Това означава да слеем e' и e_3 в едно ребро, с което намаляваме степените на y и z с единица. Намаляването на степените на върхове, които не биват свивани, е нежелано, понеже идеята на свиването на връх от степен 2 е останалата част на графа да не бъде засегната. Освен това, при такова сливане на паралелни ребра, ако говорим за планарно вписване, броят на лицата намалява. За да избегнем всичко това, искаме двата върха-съседи на свивания връх, да не са съседи помежду си.

Определение 4 (хомеоморфизъм)**.** *Два графа са хомеоморфни, ако единият може да бъде получен от другия чрез последователност от подразделяния и свивания на ребра.* □

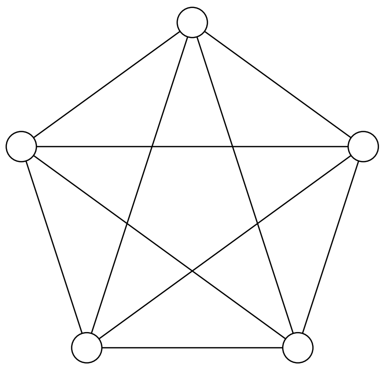
Теорема 4 (Kuratowski)**.** *Граф е планарен тогава и само тогава, когато не съдържа подграф, хомеоморфен на* K_5 *или* $K_{3,3}$.

Доказателство: В едната посока, доказателството следва веднага от Следствие 1, Следствие 2 и очевидния факт, че ако граф е планарен, всеки негов подграф също е планарен. В другата посока, доказателството е дълго и много техническо, поради което го прескачаме. Пълното доказателство може да бъде намерено в [Gib85, pp. 77–80, Theorem 3.5]. □

Да разгледаме графа на Petersen. Той не е планарен. Да докажем това с теоремата на Kuratowski. Естествено е да се опитаме да докажем това чрез K_5, понеже графът на Petersen съдържа, в някакъв смисъл, K_5 в себе си – ако на следната рисунка на графа на Petersen "колабираме" петте червени ребра, за всяко от тях идентифицирайки двата му края, ще получим точно K_5:



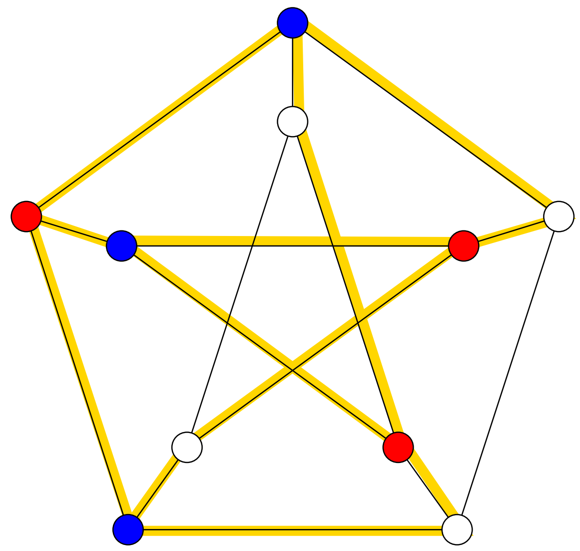
Графът на Petersen



K_5

Но графът на Petersen не съдържа подграф, хомеоморфен на K_5. За да видим, че е така, да съобразим, че в графа на Petersen всички върхове са от степен 3, а в K_5, от степен 4 – а очевидно два хомеоморфни графа съдържат един и същи брой върхове от всяка степен, различна от 2. Следователно, колабирането на ребра в посочения смисъл е различна операция от свиването на ребра.

Доказателството с теоремата на Kuratowski, че графът на Petersen не е планарен, използва $K_{3,3}$, а не K_5. Действително, графът на Petersen съдържа подграф, хомеоморфен на $K_{3,3}$. На следната рисунка е показа един такъв подграф, нарисуван върху графа на Petersen. Неговите върхове от степен, различна от две, 2 са означени с червен и син цвят (очевидно, върховете от единия дял са червени, а от другия са сини). С жълто са означени простите непресичащи се пътища в този подграф – ако в тях свием върховете от степен 2 (това са белите върхове), действително ще получим $K_{3,3}$.



Лема 2. *Във всеки планарен граф има връх от степен, не по-голяма от* 5.

Доказателство: Да допуснем противното: съществува планарен граф $G = (V, E)$, такъв че $\forall v \in V(d(v) \geq 6)$. Нека $|V| = n$ и $|E| = m$. Тогава

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq 6n \quad \leftrightarrow \quad \sum_{v \in V} d(v) = 6n + k \text{ за някое неотрицателно } k$$

Известно е, че $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Следователно,

$$2m = 6n + k \quad \leftrightarrow \quad m = 3n + \frac{k}{2}$$

Но тъй като $\frac{k}{2}$ е неотрицателно, този извод противоречи на Теорема 2 на стр. 8. $\square$

Теорема 5. *Всеки планарен граф е* 5*-оцветим.*

Доказателство: Нека цветовете са жълт, зелен, син, червен и кафяв. С цел по-кратко изложение няма да правим строга разлика между планарен граф, неговите върхове и ребра, от една страна, и планарното му вписване със своите планарни върхове и ребра, от друга страна.

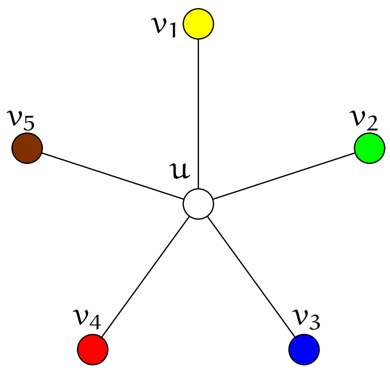
Ще докажем теоремата с индукция по броя на върховете. За база ще вземем планарните графи с не повече от 5 върха. Те са очевидно 5-оцветими. Да допуснем, че всеки планарен граф с $\leq n$ върха е 5-оцветим. Да разгледаме произволен планарен граф $G = (V, E)$ с $n + 1$ върха. Съгласно Лема 2, $\exists v \in V(d(v) \leq 5)$. Нека $G - u$ е графът, получен от G след изтриване на u. Очевидно $G - u$ също е планарен, освен това $G - u$ има n върха. Съгласно индуктивното предположение, $G - u$ е 5-оцветим. Нека $\mathrm{Adj}(u)$ означава множеството от съседите на u в G. По конструкция, $|\mathrm{Adj}(u)| \le 5$.

Ако $|\mathrm{Adj}(u)| \le 4$, то очевидно съществува поне един цвят измежду петте, без ограничение на общността нека това е зеленият цвят, който не се използва от никой връх в $\mathrm{Adj}(u)$. Тогава оцветяваме u в зелено и сме готови. Нека $|\mathrm{Adj}(u)| = 5$. Ако има поне един цвят измежду петте, който не се използва от никой връх в $\mathrm{Adj}(u)$, доказателството се извършва аналогично. Нека всичките пет цвята се ползват от петте върха на $\mathrm{Adj}(u)$.

Нека $\mathrm{Adj}(u) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Без ограничение на общността, нека в планарното вписване на G, тези върхове се срещат в последователност

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$$

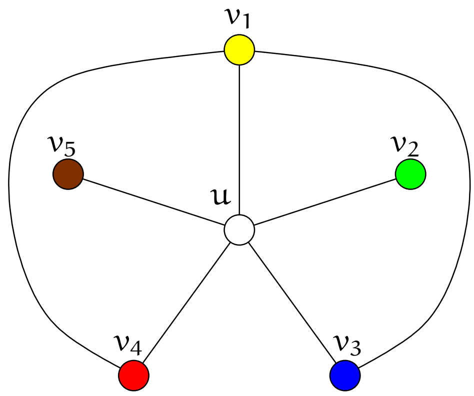
ако обикаляме около u в дадена посока, да речем, по часовниковата стрелка, и нека цветовете им са, както е показано на следната рисунка:



Между всеки два от върховете $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ може да има или да няма ребро, но тези възможности не са независими. Да разгледаме десетте ненаредени двойки $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_1, v_5\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_2, v_5\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_3, v_5\}$, $\{v_4, v_5\}$. Да наречем тези двойки, *потенциалните ребра*. От тях, $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_1, v_5\}$ са *късите* потенциални ребра, а останалите, *дългите*. Подчертаваме, че това разграничение между къси и дълги потенциални ребра е възможно само след указването на разположението на върховете в равнината; ако разсъждавахме на ниво граф (а не на ниво планарно вписване) без да уточним някаква кръгова подредба между $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, такова разбиване на потенциалните ребра би било невъзможно. Още дефинираме, че кое да е потенциално ребро *присъства* в G, ако в G има ребро с краища съответните два върха.

Тривиално е да се покаже, че поне едно от потенциалните ребра не присъства в G. Ако допуснем обратното, в G би имало подграф†, изоморфен на K_5. Сега ще покажем по-силно твърдение: поне три от дългите потенциални ребра не присъстват в G, независимо от това дали и колко къси потенциални ребра присъстват. Доказателството се основава на наличието на петте ребра $(u, v_1), \ldots, (u, v_5)$ в (планарното вписване на) G. Лесно се вижда, че най-много две дълги потенциални ребра може да се разположат в равнината, така че да няма пресичане нито на дълги ребра, нито на дълго ребро с някое от (u, v_i) за $1 \le i \le 5$. Следната рисунка онагледява възможността да има две дълги ребра, инцидентни с v_1:

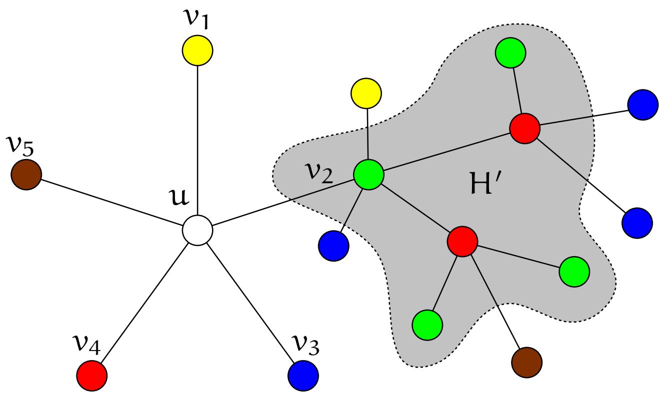
† Става дума за индуцирания от $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ подграф.



Следователно, за поне два върха от $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, без ограничение на общността нека това са v_2 и v_4, е вярно, че те не са съседи в G. Останалата част на доказателството използва допускането, че между v_2 и v_4 няма ребро. Подчертаваме, че никъде надолу *няма да използваме допускане*, че има ребра (v_1, v_3) и (v_1, v_4). Последната рисунка имаше за цел да покаже, че не може да има повече от две дълги ребра. Дълги ребра може изобщо да няма.

Цветовете на v_2 и v_4 са зелено и червено. Нека H е подграфът на G, индуциран от зелените и червените върхове.

Случай I: v_2 и v_4 се намират в различни свързани компоненти на H. Нека H' е свързаната компонента на H, която съдържа v_2. Примерно:



Правим следната смяна на цветове на върхове:

- всеки връх на H', който е бил зелен преди смяната на цветове, става червен,
- всеки връх на H', който е бил червен преди смяната на цветове, става зелен,
- цветът на всеки връх в G, който не е в H', не се променя.

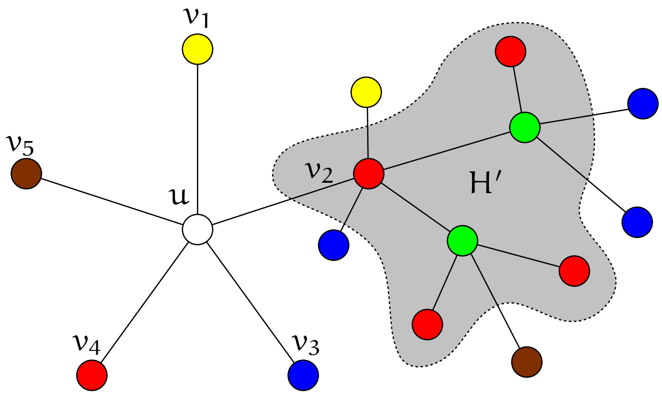
Ще докажем, че тази смяна на цветове представлява легално оцветяване на върховете на графа. Тоест, че не може да се получи ребро, двата края на което са оцветени в един цвят.

1. ребрата, нито един връх на които не е от H', очевидно не могат да имат два края от един цвят след смяната;

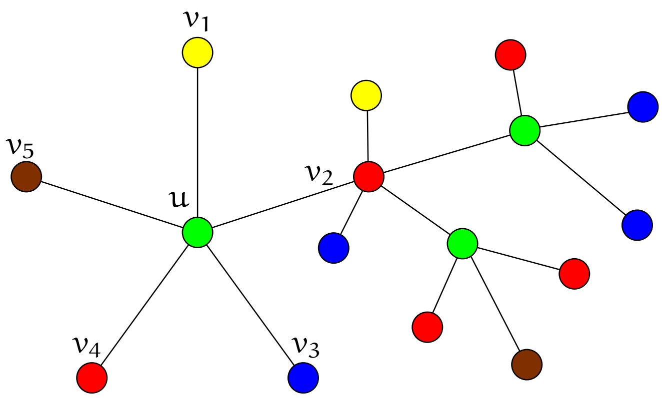
2. да разгледаме произволно ребро (x, y), точно единият край на който, да речем x, е в H'. Преди смяната на цветовете, x е бил червен или зелен, y е бил жълт, син или кафяв. След смяната, x е пак в един от цветовете червен или зелен (обратния на предния цвят), а y си остава в цвят, който не е нито червен, нито зелен. Следователно, двата края на (x, y) не са оцветени в един цвят след смяната.

3. да разгледаме произволно ребро (x, y) от H'. Без ограничение на общността нека x е бил червен, а y, зелен преди смяната. Тогава след смяната x е зелен, а y, червен. Следователно, двата края на (x, y) не са оцветени в един цвят след смяната.

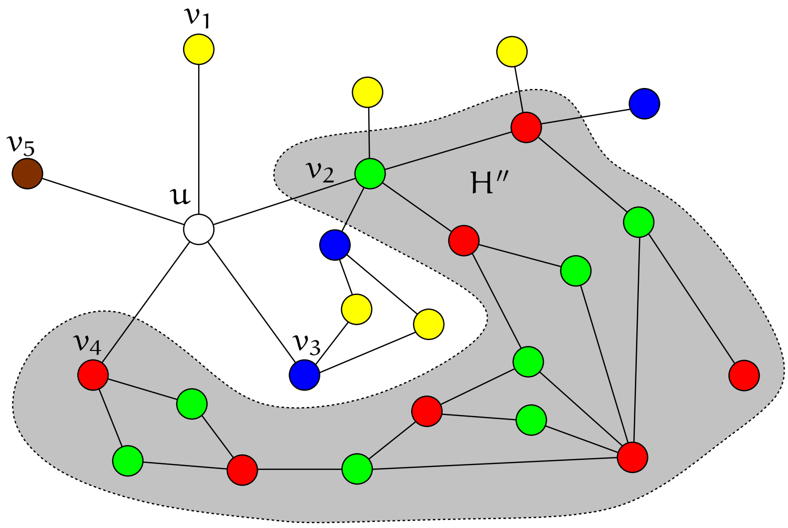
Ето как изглежда горният пример след смяната на цветовете на H':



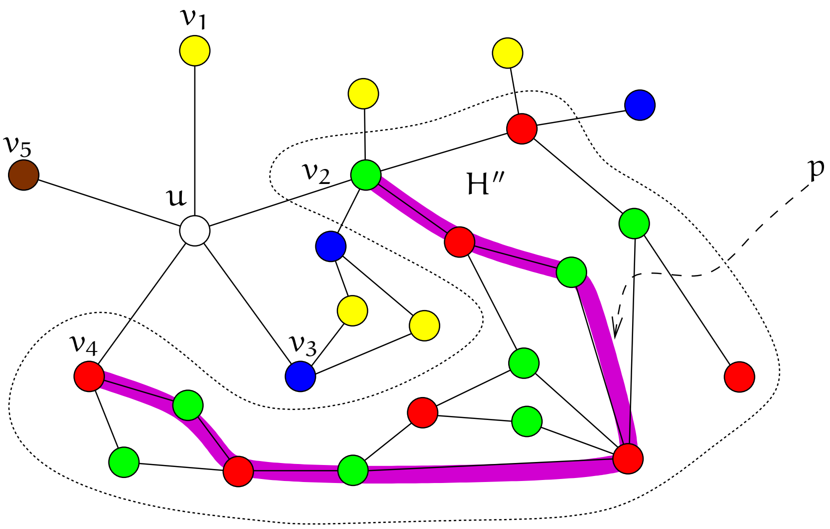
След смяната на цветовете, цветът, в който е бил оцветен v_2 преди смяната, а именно зеления, е "свободен" в смисъл, че нито един съсед на u не го ползва. Оцветяваме u в него и получаваме 5-оцветяване на G:



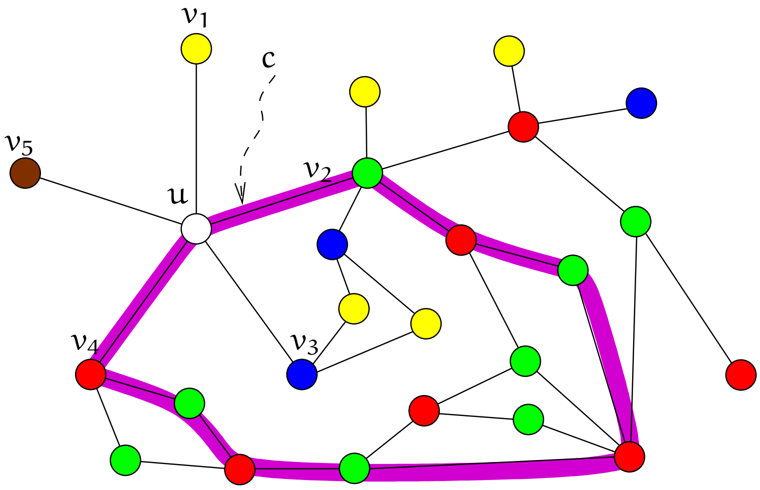
Случай II: v_2 и v_4 се намират в една и съща свързана компонента на H. Нека тази свързаната компонента на H бъде наречена H''. Примерно:



В този случай е безсмислено да сменяме оцветяването на върховете от H'' като в **Случай I**—червено в зелено и обратно—защото няма да "освободим" нито червения, нито зеления цвят за u; u би имал и червен, и зелен съсед след смяната. Но забелязваме, че v_1 и v_3 в този случай са, в някакъв смисъл, изолирани един от друг. Формално, в G не съществува алтерниращ жълто-син път с краища v_1 и v_3. Сега ще докажем този факт. Тъй като H'' е свързан, съществува алтерниращ зелено-червен прост път между v_1 и v_3 в H''. На следната рисунка е показан такъв примерен път p, очертан в пурпурно:

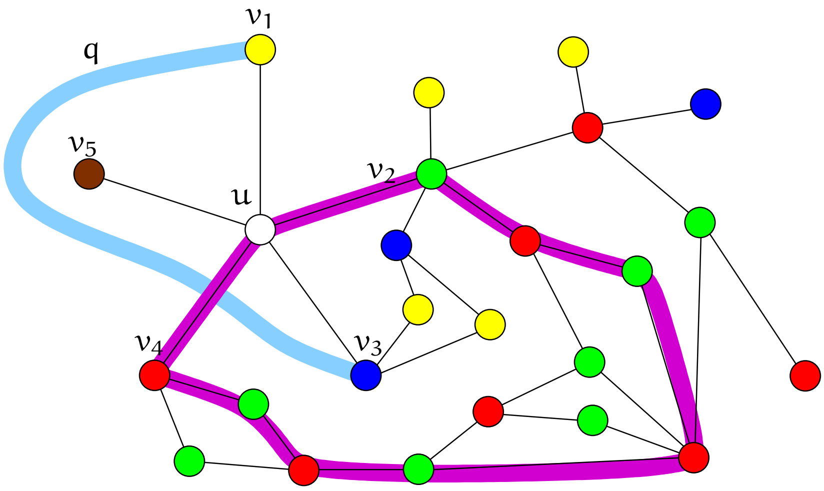


Заедно с ребрата (u, v_4) и (u, v_2) и връх u, пътят p образува прост цикъл c в G:

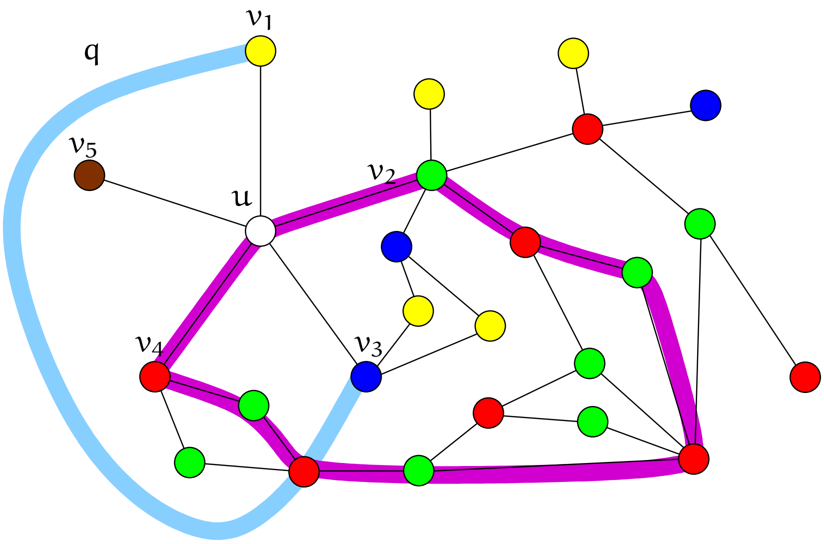


Спрямо цикъла c има точно два района на равнината и очевидно всеки върховете v_1 и v_3 се намира в един от тези райони. Следователно:

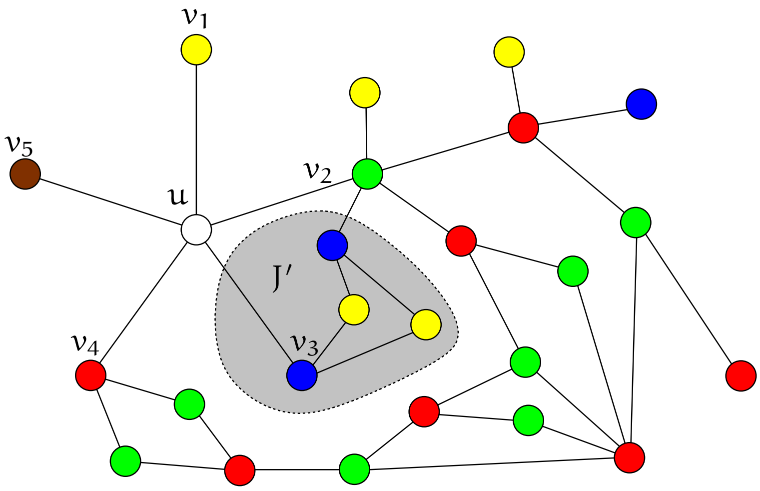
- нито може да има ребро с краища v_1 и v_3 в G, защото такова ребро би пресичало ребро от c, а по конструкция G е планарен;
- нито може да има алтерниращ жълто-син път с краища v_1 и v_3. Ако допуснем, че има такъв път q и той няма общ връх с c, би имало непозволено пресичане на ребра и G не би бил планарен (q е очертан в светло синьо):



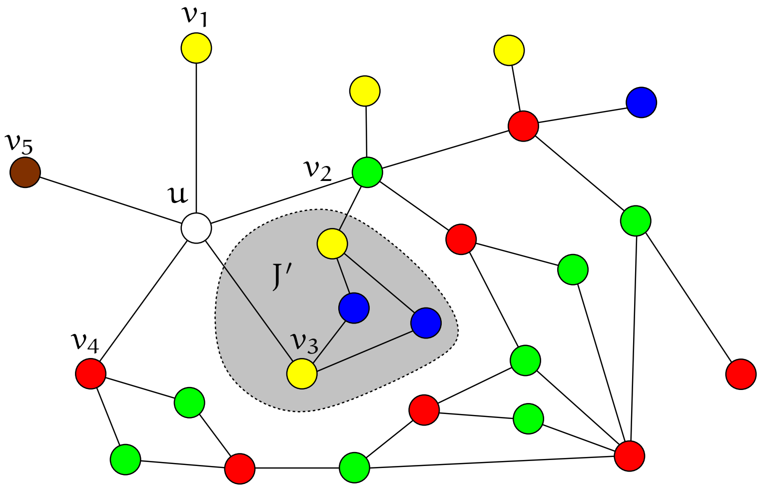
Да допуснем, че хипотетичният път q има поне един общ връх с c. Върховете на q са оцветени в жълто и синьо. Върховете на c са оцветени в три цвята: зелен, червен и бял (това е цветът на u в момента, u още не е оцветен в нито един от петте цвята, така че можем да считаме, че е оцветен в някакъв шести временен цвят, примерно бял). Получаваме противоречие – общият връх трябва да е от една страна син или жълт, а от друга, зелен, червен или бял.



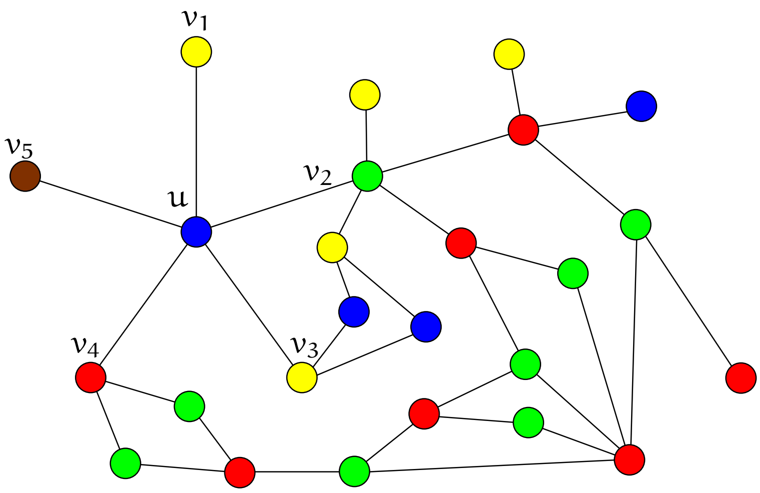
Доказахме, че при текущите допускания не съществува алтерниращ жълто-син път между v_1 и v_3. Нека J е подграфът на G, индуциран от жълтите и сините върхове. Щом в G няма алтерниращ жълто-син път между v_1 и v_3, то v_1 и v_3 са в различни свързани компоненти на J. Нека v_3 се намира в свързаната компонента J' на J:



Извършваме смяна на цветовете жълто в синьо и синьо в жълто върху J', оставяйки другите върхове на G в същите цветове като преди.



По начин напълно аналогичен на **Случай I** доказваме, че след тази смяна на цветовете не може да получим ребро, чиито два края са оцветени в един и същи цвят. Но тогава връх v_3 се оказва жълт. По този начин си "освобождаваме" синия цвят и оцветяваме u в синьо.



Q.E.D

Литература

[Gib85] A.M. Gibbons. *Algorithmic graph theory.* Cambridge University Press, 1985.