Приложения на дванайсетте комбинаторни конфигурации в математически задачи

Проект по ИГКТГ — СУ, ФМИ, 2019/2020 уч. г., летен семестър

Антони Калоферов, ФН: 81394

8 май 2020 г.

Разглеждаме различни варианти на следната задача: По колко начина можем да сложим m топки в n кутии? Топките и кутиите могат да бъдат различими или неразличими. Може да има или да няма ограничения от типа: всяка кутия трябва да съдържа поне една или най-много една топка. Така възникват общо дванайсет случая, за всеки от които съществува формула за броя на разпределенията.

n кутии

m топки		различими	неразличими
различими	без ограничения	n^m	$\sum_{k=1}^{n} \left\{ m \atop k \right\}$
различими	≤ 1 топка в кутия (инекции)	$n^{\underline{m}}$	$[\![m \leq n]\!]$
различими	≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$	$\left\{ m \atop n \right\}$
неразличими	без ограничения	$\binom{m+n-1}{m}$	$\sum_{k=1}^{n} p(m,k)$
неразличими	≤ 1 топка в кутия (инекции)	$\binom{n}{m}$	$[\![m \leq n]\!]$
неразличими	≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$\binom{m-1}{m-n}$	$p(m,n)$

1. Доказателства

1.1. Различими топки, различими кутии, без ограничения

Можем да си представяме, че трябва да поставим m топки една по една в n кутии. Тъй като няма ограничения за начина, по който трябва да се поставят, следва, че за всяка топка имаме n възможни позиции. Следователно m пъти избираме кутия от № 1 до № n и по правилото за умножение получаваме броя на разпределенията:

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m \text{ множителя}} = n^m. \tag{1}$$

1.2. Различими топки, различими кутии, не повече от една топка в кутия

Отново поставяме m топки една по една в n кутии, но този път всяка кутия съдържа най-много една топка. За всяка следваща топка има една свободна кутия по-малко, затова множителите намаляват с единица:

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = n^{\underline{m}}. \tag{2}$$

Разбира се, ако $m > n$, няма нито една възможност и формулата дава отговор 0.

1.3. Различими топки, различими кутии, поне една топка в кутия

Ще използваме формула (1), но ще се погрижим да извадим разпределенията, които съдържат празни кутии. Можем да изберем k от n кутии (без определен ред) по $\binom{n}{k}$ начина. Избраните k кутии оставяме празни, всичките m топки слагаме единствено в другите $n-k$ кутии, някои от които също можем да оставим празни. Според формула (1) съществуват $(n-k)^m$ такива разпределения, обаче някои от тях са броени многократно и не можем просто да ги извадим от общия брой, а трябва да приложим принципа за включване и изключване. От него следва, че броят на разпределенията без празни кутии е равен на

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m. \tag{3}$$

При $m < n$ този израз има стойност нула, което се съгласува с липсата на разпределения от разглеждания вид.

1.4. Неразличими топки, различими кутии, без ограничения

Представяме всяко разпределение като редица от кръгчета и чертички:

$$\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \mid \bigcirc\bigcirc \mid \bigcirc\bigcirc\bigcirc \mid \bigcirc$$

Кръгчетата изобразяват топките, а отвесните черти са прегради между кутиите. Тези редици представляват пермутации с повторение на m кръгчета и $n-1$ чертички. Броят на пермутациите се пресмята по формулата

$$\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} = \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-1}{n-1}. \tag{4}$$

Друг начин: тълкуваме разпределенията като комбинации с повторение на n елемента (кутиите), от клас m. За всяка топка избираме кутия, където да поставим топката, следователно избираме m пъти от n кутии. Понеже топките са неразличими, няма значение редът, в който избираме кутиите. Важно е единствено това, колко пъти сме избрали една или друга кутия. Ето защо разпределенията са комбинации. Една и съща кутия може да бъде избрана няколко пъти, затова разпределенията са комбинации с повторение.

1.5. Неразличими топки, различими кутии, не повече от една топка в кутия

Отново избираме m пъти от n кутии и редът, в който избираме кутиите, няма значение, така че разпределенията пак са комбинации, но този път без повторение, тъй като нямаме право да слагаме две топки в една кутия. Затова броят на разпределенията е

$$\binom{n}{m}. \tag{5}$$

При $m > n$ този израз има нулева стойност, защото не съществуват разпределения с желаните свойства.

1.6. Неразличими топки, различими кутии, поне една топка в кутия

Отначало слагаме по една топка във всяка кутия. После разпределяме останалите $m-n$ топки без ограничения. Следователно броят на разпределенията се получава по формула (4) след заменяне на m с $m-n$:

$$\binom{m-1}{m-n} = \binom{m-1}{n-1}. \tag{6}$$

1.7. Различими топки, неразличими кутии, не повече от една топка в кутия

При $m \leqslant n$ има само едно разпределение: m кутии съдържат по една топка, другите $n-m$ кутии са празни. Кои кутии съдържат топка и кои са празни, няма никакво значение, защото кутиите са неразличими. При $m > n$ очевидно не съществуват разпределения. Така че броят им е равен на

$$[\![m \leqslant n]\!], \tag{7}$$

където $[\![p]\!]$ е числото 1, когато съждението p е истина, и 0 в противен случай.

1.8. Неразличими топки, неразличими кутии, не повече от една топка в кутия

Формула (7) важи и в този случай: броят на разпределенията е равен на

$$[\![m \leqslant n]\!]. \tag{8}$$

Разсъжденията от предишната точка се пренасят тук дословно.

1.9. Различими топки, неразличими кутии, поне една топка в кутия

Важат разсъжденията от точка 1.3 с една промяна: тъй като сега кутиите са неразличими, разместването им не променя разпределението на топките. Затова във формула (3) делим на $n!$ (броя на пермутациите на кутиите):

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m. \tag{9а}$$

Не е известна затворена формула за този израз. Той се означава накратко със символа

$$\left\{ m \atop n \right\} \tag{9б}$$

и се нарича число на Стирлинг от втори род.

1.10. Различими топки, неразличими кутии, без ограничения

За разлика от предишния случай, не можем просто да разделим n^m на $n!$, защото празните кутии са еднакви и няма смисъл да ги разместваме. Вместо това използваме формула (9б), сумирайки по възможните стойности на броя на непразните кутии, тоест по всички цели числа от 1 до n включително:

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ m \atop k \right\}. \tag{10}$$

1.11. Неразличими топки, неразличими кутии, поне една топка в кутия

Щом топките са неразличими, то за всяка кутия се знае единствено броят на топките в нея, но не и кои са те. А тъй като и самите кутии са неразличими, техните размествания не променят разпределението на топките. Ето защо имаме право да наредим кутиите в намаляващ ред на броя на топките в тях. Това поражда биекция между разпределенията на топките по кутиите и целочислените разбивания на числото m в сбор от n събираеми. На разбиването $m = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, където $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 1$, съответства следното разпределение: една кутия с x_1 топки, една кутия с x_2 топки, ... , една кутия с x_n топки. Наличието на биекция показва, че броят на целочислените разбивания

$$p(m, n) \tag{11}$$

е равен на броя на разпределенията на топките по кутиите. Не е известна точна затворена формула за $p(m, n)$. Познати са обаче приблизителни затворени формули и точна рекурентна формула. С тяхна помощ можем да пресмятаме стойностите на функцията бързо — без да прибягваме до пълно изчерпване.

1.12. Неразличими топки, неразличими кутии, без ограничения

Сега допускаме празни кутии. Съгласно с формула (11) има $p(m, k)$ разпределения при k непразни кутии. Като сумираме по всички възможни стойности на k, получаваме броя на разпределенията:

$$\sum_{k=1}^{n} p(m, k). \tag{12}$$

При $n = m$ можем да използваме краткото обозначение $p(m)$ за броя на всички целочислени разбивания на m:

$$p(m) = \sum_{k=1}^{m} p(m, k).$$

2. Задачи

2.1. Формула на Кейли

Броят на дърветата с n номерирани върха е n^{n-2}.

Доказателство: На всяко дърво с n номерирани върха съпоставяме числова редица по следното правило. Изтриваме листото с най-малкия номер, а в редицата записваме номера на единствения му съсед в дървото. Правим това $n-2$ пъти и от дървото остава само едно ребро. Получената редица се нарича редица на Прюфер. Тя се състои от $n-2$ члена, всеки от които е цяло число от 1 до n включително. Числата могат да се повтарят. Броят на срещанията на всяко число е с единица по-малък от степента на съответния връх на дървото.

Може да се докаже, че описаното съответствие е биекция. Затова дърветата са колкото редиците на Прюфер. А редиците преброяваме така. Имаме $n-2$ различими (номерирани) топки и n различими (номерирани) кутии. Ако k-тият член на редицата на Прюфер има стойност ℓ, това означава, че k-тата топка отива в ℓ-тата кутия. Няма ограничения за броя на топките в една и съща кутия, т.е. важи формула (1), откъдето при $m = n - 2$ следва формулата на Кейли.

2.2. Учебно разписание

Учениците от 7а клас изучават четиринайсет предмета. Колко възможности има за учебната програма в сряда, ако тя трябва да съдържа шест учебни часа по различни предмети?

Решение: Нека си мислим за учебните предмети като за кутии, които се различават по названията си. Учебните часове тълкуваме като топки, различими по номерата си. Поставянето на топка № k в кутия № ℓ означава, че предметът ℓ ще се преподава през k-тия учебен час в сряда. Празните кутии са онези предмети, които няма да се преподават в сряда. По условие часовете в сряда трябва да са по различни учебни предмети, т.е. всяка кутия може да съдържа не повече от една топка. Затова прилагаме формула (2) при $n = 14$ и $m = 6$. Съществуват $14^{\underline{6}} = 14 \,.\, 13 \,.\, 12 \,.\, 11 \,.\, 10 \,.\, 9 = 2162160$ начина за съставяне на учебната програма за сряда.

2.3. Брой думи (първи вариант)

Да се преброят думите, съставени от единайсет букви *а*, *б*, *в* и *г*, подредени по азбучен ред във всяка дума. Еднаквите букви трябва да стоят една до друга и трябва да има поне една буква от всеки вид.

Решение: Трябва да преброим думите, образувани по следния шаблон: $\underbrace{аа\ldots а}_{i_1}\underbrace{бб\ldots б}_{i_2}\underbrace{вв\ldots в}_{i_3}\underbrace{гг\ldots г}_{i_4}$, където $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 11$ и четирите събираеми са цели положителни числа. Всяка дума представлява разпределение на единайсет неразличими топки в четири различими кутии, надписани с буквите *а*, *б*, *в* и *г*, като всяка кутия съдържа поне една топка. Във формула (6) заместваме $m = 11$ и $n = 4$:

$$\binom{11-1}{11-4} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \frac{720}{6} = 120.$$

Следователно могат да се съставят сто и двайсет думи по показания шаблон.

2.4. Брой думи (втори вариант)

Да се преброят думите, съставени от единайсет букви *а*, *б*, *в* и *г*, ако трябва да има поне една буква от всеки вид. Буквите в думата могат да бъдат подредени по произволен начин.

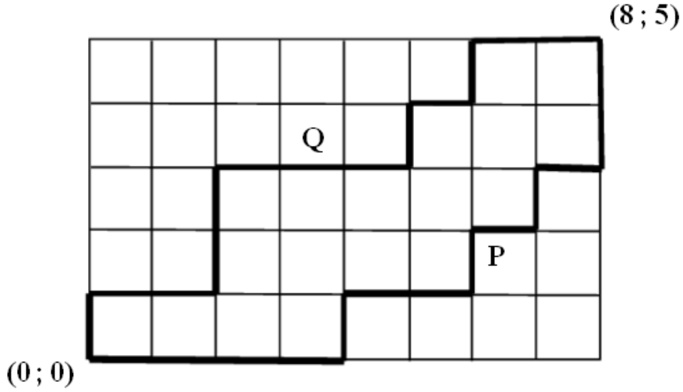
Решение: Сега всяка дума е разпределение на единайсет различими топки в четири различими кутии. Топките са номерирани с целите числа от 1 до 11 включително, а кутиите са надписани с буквите *а*, *б*, *в* и *г*. Слагането на топката с номер k в кутията с надпис ℓ означава, че на k-тото място в думата стои буквата ℓ. Във всяка кутия трябва да има поне една топка, затова използваме формула (3) при $m = 11$ и $n = 4$:

$$\sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{4}{k} (4-k)^{11} = 4^{11} - 4 \,.\, 3^{11} + 6 \,.\, 2^{11} - 4 + 0 = 3498000.$$

Полученото число е броят на думите от желания вид.

2.5. Брой пътища между две точки в целочислена решетка

Да се намери броят на пътищата от точката $(0\,;\,0)$ до точката $(8\,;\,5)$, ако на всеки ход правим по една стъпка или на север (N), или на изток (E).



P = EEEENEENENENN

Q = NEENNEEENENEE

Решение: Всеки от пътищата може да се запише като редица от осем букви N и пет букви E в някакъв ред. Можем да мислим за тринайсетте члена на редицата като за кутии, в които или има топка (E), или няма (N). При това тълкуване топки са осемте неразличими букви E. Кутиите са различими по поредния си номер — цяло число от 1 до 13 вкл. Има най-много по една топка в кутия, затова важи формула (5) с $n = 13$ и $m = 8$:

$$\binom{13}{8} = \frac{13!}{8!\,5!} = \frac{13\,.\,12\,.\,11\,.\,10\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} = 13\,.\,11\,.\,9 = 1287.$$

Следователно има хиляда двеста осемдесет и седем пътя от точката $(0\,;\,0)$ до точката $(8\,;\,5)$.

2.6. Разлагане на множители

Искаме да разложим числото 223092870 на множители, които са цели числа, по-големи от единица.
а) Колко са разлаганията в произведение от три множителя?
б) Колко са всички разлагания?
Две разлагания се смятат за еднакви, ако се различават само по реда на множителите.

Решение: Разлагаме даденото число в произведение от прости множители:

$$223092870 = 2\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,11\,.\,13\,.\,17\,.\,19\,.\,23.$$

Забелязваме, че в произведението участват девет прости множителя и всички са различни.

а) Всяко разлагане на даденото число (223092870) в произведение от три множителя, по-големи от единица, представлява групиране на деветте прости делителя в три непразни произведения. Например

$$223092870 = (2\,.\,13\,.\,5\,.\,7)\,.\,(11\,.\,3\,.\,17)\,.\,(19\,.\,23) = 910\,.\,561\,.\,437.$$

Всяко групиране с помощта на скоби може да бъде тълкувано като разпределение на девет топки по три кутии. Кутии са групите; те са неразличими, защото по условие редът на множителите в разлагането няма значение. Топки са деветте прости делителя на даденото число; те са различими по числената си стойност. Всяка кутия трябва да съдържа поне една топка, защото не се допускат празни произведения (тоест единични множители). Затова прилагаме формули (9а) и (9б) с $n = 3$ и $m = 9$:

$$\left\{ {9 \atop 3} \right\} = \frac{1}{3!} \sum_{k\,=\,0}^{3} (-1)^k \binom{3}{k} (3-k)^9 = \frac{19683 - 1536 + 3 - 0}{6} = 3025.$$

Тоест числото 223092870 има три хиляди двайсет и пет разлагания на три множителя, по-големи от единица.

б) Сега няма изискване за броя на множителите (кутиите), но щом са непразни, те са не повече от девет. От друга страна, можем да смятаме, че са точно девет, като разрешим използването на единични множители. Така отпада ограничението да няма празни кутии, т.е. важи формула (10) с $n = 9$ и $m = 9$. Понеже $m = n$, сборът е равен на съответното число на Бел: $\displaystyle\sum_{k\,=\,1}^{9} \left\{ {9 \atop k} \right\} = \mathsf{B}_9 = 21147.$ Толкова са всички разлагания на 223092870.

2.7. Триъгълник от жетони

Пребройте начините за разполагане на десет еднакви жетона във върховете на равностранен триъгълник:
а) ако във всеки връх на триъгълника трябва да има поне един жетон;
б) без това ограничение.

Решение: Жетоните съответстват на топките, а върховете на триъгълника — на кутиите; $\mathtt{m} = 10$; $\mathtt{n} = 3$. Жетоните са еднакви, тоест неразличими. Върховете на равностранния триъгълник също са неразличими, защото са разположени симетрично.

а) Прилагаме формула (11), тъй като в условието се иска всички кутии да съдържат поне по една топка. Броят на възможните разпределения на жетоните е равен на

$$\mathtt{p}(10\,;\,3) = 8.$$

б) Прилагаме формула (12), понеже няма ограничения за броя на топките във всяка кутия:

$$\sum_{\mathtt{k}=1}^{3} \mathtt{p}(10\,;\,\mathtt{k}) = \mathtt{p}(10\,;\,1) + \mathtt{p}(10\,;\,2) + \mathtt{p}(10\,;\,3) = 1 + 5 + 8 = 14.$$

В този случай има 14 начина за разпределяне на жетоните по върховете на равностранния триъгълник.

2.8. Бонбони

По колко начина пет деца могат да си поделят двайсет еднакви бонбона? Може някое дете да остане без бонбон.

Решение: Бонбоните съответстват на топките, а децата — на кутиите в нашия модел; т.е. $\mathtt{m} = 20$ и $\mathtt{n} = 5$. Децата са различими, но бонбоните не са (защото са еднакви). Разпределянето на бонбоните е без ограничения, така че важи формула (4). От нея намираме

$$\binom{24}{20} = \frac{24!}{20!\,4!} = 23\,.\,22\,.\,21 = 10626.$$

Следователно съществуват 10626 начина да се поделят двайсет еднакви бонбона между пет деца.