ВЪРХОВО ПОКРИТИЕ

От теорията на алгоритмите е известно, че е NP-пълна задачата за разпознаване дали даден неориентиран граф има върхово покритие, в което броят на върховете не надхвърля дадено число. Върхово покритие се нарича такова множество от върхове, че за всяко ребро на графа поне един от краищата на реброто принадлежи на множеството.

Задачата има оптимизационна формулировка: за даден неориентиран граф да се намери върхово покритие с възможно най-малък брой върхове.

Тъй като задачата за разпознаване е NP-пълна, то за оптимизационния вариант сигурно няма полиномиален алгоритъм (ако P не съвпада с NP). Но има полиномиален 2-апроксимиращ алгоритъм. Той се основава на алчна стратегия: докато съществуват ребра, взимаме едно ребро и изтриваме краищата му заедно с всички излизащи от тях ребра. Така получаваме съчетание от общо k ребра; техните краища са $2k$ на брой. Те образуват върхово покритие, защото, ако допуснем противното, тоест ако допуснем, че е останало непокрито ребро, то описаният по-горе цикъл не е завършил, а това противоречи на избора на върховете. Очевидно алгоритъмът е бърз; по най-груба оценка времевата му сложност е най-много квадратична: след всяко взимане на ребро (макс. $n/2$ пъти) обхождаме графа (за време от порядък $n + m$) в търсене на други ребра. Така времевата сложност е от порядък $O(n(n + m))$, т.е. не по-лоша от квадратична, където n и m са съответно бройките на върховете и на ребрата.

Нека M е най-малкият брой върхове на върхово покритие. Намерените от алгоритъма k ребра образуват съчетание, тоест никои две от тях нямат общи краища. Затова всяко върхово покритие съдържа поне k върха (иначе казано, $M \geq k$) — поне един от краищата на всяко от тези k ребра. От друга страна, вече установихме, че краищата на намерените ребра образуват върхово покритие; от минималността на M следва, че $M \leq 2k$. Следователно важи двойното неравенство $k \leq M \leq 2k$. От $k \leq M$ следва, че $2k \leq 2M$, откъдето пък следва друго двойно неравенство: $M \leq 2k \leq 2M$.

След като $2k$ е отговорът, върнат от алгоритъма, то сега става ясно, че този отговор лежи между вярната стойност M и удвоеното число $2M$. Значи предложеният алгоритъм е 2-апроксимиращ, следователно притежава фиксирана относителна точност.

Ако $P \neq NP$, то няма алгоритъм, който може за полиномиално време при всякакви входни данни да намери с фиксирана абсолютна точност върхово покритие, близко до минималното. Това следва чрез допускане на противното и полиномиална редукция от варианта за разпознаване:

Неориентиран граф G с n върха и m ребра има ли върхово покритие с не повече от A върха?

Алгоритъм:

1) Създаваме граф H от $C + 1$ копия на G (всяко копие е отделна компонента на свързаност), където C е предполагаемата абсолютна точност (без ограничение цяло положително число).
2) Намираме минимално върхово покритие на H с абсолютна точност C.
3) Намираме компонентата на H с най-малко върхове от покритието; нека M е техният брой.
4) Ако $A < M$, отговаряме с "не", иначе отговаряме с "да".

Първата стъпка изисква време $(C + 1)(n + m)$, което има линеен порядък, тъй като числото C е константа по предположение. Времето за втората стъпка е полиномиално съгласно с допускането. Третата стъпка се състои в обхождане на графа H, което изразходва време $(C + 1)(n + m)$, тоест също от линеен порядък. Четвъртата стъпка изразходва константно време. Щом четирите събираеми са полиноми, то и сборът им е полином, затова предложеният алгоритъм има полиномиална времева сложност при всякакви входни данни.

Коректност на алгоритъма: Нека най-малкото върхово покритие на графа G притежава N върха. Следователно най-малкото върхово покритие на графа H се състои от $(C + 1)N$ върха. На стъпка 2 се изпълнява апроксимиращ алгоритъм с абсолютна точност C и неговият резултат R удовлетворява съотношенията $(C + 1)N \leq R \leq (C + 1)N + C < (C + 1)N + (C + 1) = (C + 1)(N + 1)$. Оттук следва, че $R < (C + 1)(N + 1)$. Понеже R е сбор от $C + 1$ събираеми и най-малкото от тях е M (стъпка 3), то $(C + 1)M \leq R < (C + 1)(N + 1)$, следователно $(C + 1)M < (C + 1)(N + 1)$, откъдето $M < N + 1$.

След като M е броят върхове на върхово покритие на една от компонентите на графа H, тоест M е броят върхове на върхово покритие на едно от копията на графа G, то от минималността на N следва, че $N \leq M$.

От двойното неравенство $N \leq M < N + 1$, като отчетем факта, че M и N са цели числа, правим извода, че $M = N$, т.е. M е най-малкият брой върхове на върхово покритие на G, затова стъпка 4 дава правилен отговор на задачата за разпознаване. Щом като съществува полиномиален алгоритъм за NP-пълна задача, то P = NP, което противоречи на предпоставката в условието.