КУРСОВ ПРОЕКТ
ПО ИЗБИРАЕМИЯ УЧЕБЕН ПРЕДМЕТ
“ИЗБРАНИ ГЛАВИ ОТ КОМБИНАТОРИКАТА
И ТЕОРИЯТА НА ГРАФИТЕ”

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ “СВЕТИ КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

ЛЕТЕН СЕМЕСТЪР НА 2022 / 2023 УЧЕБНА ГОДИНА

Задача 1. Докажете следните асимптотични формули:

а) Асимптотика на числата на Каталан: $C_n \sim \dfrac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$ при $n \to \infty$.

Упътване: Тръгнете от затворената формула за числата на Каталан, след това изразете биномния коефициент с помощта на факториели и приложете приближението на Стирлинг.

б) Асимптотика на числата на Ойлер за броя на зигзагообразните пермутации:

$$A_n \sim 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1} .\ n! \text{ при } n \to \infty.$$

Упътване: Използвайте наготово формулата на Андре (доказана на лекции) за експоненциалната пораждаща функция на разглежданите числа на Ойлер. Намерете най-малката положителна особена точка a на функцията (т.е. точка, която анулира знаменателя) и изследвайте функцията в околност на точката a. За целта я представете като дроб със знаменател $a - x$, заместете числителя с границата му L при $x \to a$ (получава се асимптотично, а не точно равенство, затова пишете $\sim$ вместо $=$ при този преход). Дробния израз преработете така:

$$\frac{L}{a-x} = \frac{L}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{a}}.$$

Получената дробна функция развийте в степенен ред (по формулата за сбор на безкрайна геометрична прогресия). Накрая използвайте следното твърдение, известно като теорема за преноса: каквото е асимптотичното поведение на пораждащата функция в околност на най-малката положителна особена точка, такова е и асимптотичното поведение на коефициентите на степенния ред (тоест членовете на числовата редица) при $n \to \infty$.

в) Асимптотика на числата на Стирлинг от втори род:

За произволно допустимо, но фиксирано k важи асимптотичната формула $\left\{ n \atop k \right\} \sim \dfrac{k^n}{k!}$ при $n \to \infty$.

Упътване: Приближението е с излишък. Съобразете как е получен изразът в дясната страна, а след това докажете, че излишъкът е несъществен спрямо приближението.

Задача 2. Докажете следните комбинаторни тъждества:

а) С биномни коефициенти:

$$\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k\binom{2n}{k+n}^3=\frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

б) С биномни коефициенти, числа на Стирлинг от втори род и числа на Бел:

$$B_{n+m}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left\{{m \atop j}\right\}\binom{n}{k}j^{n-k}B_k.$$

Задача 3. Нека s е цяло положително число. Разглеждаме редица от цели положителни числа, определена с равенствата $a_1 = 0$, $a_2 = 2s$, $a_3 = 3$, $a_{n+3} = s\,a_{n+1} + a_n$ за всяко цяло $n \geq 1$. Докажете, че a_p се дели на p за всяко просто число p.

Упътване: Въпреки че даденото уравнение е линейно-рекурентно, не е добре да се опитвате да го решавате чрез характеристично уравнение: то се получава кубично и има параметър s. По принцип може да бъде решено с формулата на Кардано, но това само усложнява задачата. Затова е по-добре да поемете по заобиколен път. Очевидно a_n е полином на s. Означете с $b_{n\,;\,k}$ коефициента пред s^k. За $b_{n\,;\,k}$ ще получите рекурентно уравнение и начални условия, като в началните условия ще участват числата 2 и 3 (и 0), а рекурентното уравнение ще съдържа само действието събиране. Значи, $b_{n\,;\,k}$ е линейна комбинация на двойки и тройки с някакви цели коефициенти, тоест $b_{n\,;\,k} = 2\lambda_{n\,;\,k} + 3\mu_{n\,;\,k}$. Формули за $\lambda_{n\,;\,k}$ и $\mu_{n\,;\,k}$ се получават лесно, ако се досетите за комбинаторния смисъл на тези две величини. Разликите между индексите в рекурентното уравнение за $b_{n\,;\,k}$ подсказват смисъла на λ и μ.

Тази задача е от международното студентско състезание по математика "Ал-Хорезми", проведено в Узбекистан през 2018 г.

ГРАФИ

Задача 4. Докажете следните варианти на теоремата на Менгер:
Ако x и y са два конкретни върха в краен неориентиран граф, то:

а) най-малкият брой ребра, които трябва да се премахнат, за да няма път между x и y, съвпада с най-големия брой пътища между x и y, които два по два нямат общи ребра;

б) ако между върховете x и y няма ребро, то най-малкият брой върхове, които трябва да се изтрият (с излизащите от тях ребра), за да няма път между x и y, съвпада с най-големия брой пътища между x и y, които два по два нямат общи върхове, различни от x и y.

Забележки към втората част на теоремата:

— Не е позволено да се изтриват самите върхове x и y.

— Ясно е, че ако между върховете x и y има ребро, те не могат да бъдат отделени чрез изтриване на върхове.

С подходящ пример покажете разликата между частите на теоремата, тоест покажете два пътя с общи краища, които нямат общи ребра, обаче имат общи върхове, различни от краищата. Възможно ли е обратното?

Задача 5. Формулирайте и докажете теоремата на Туран. Определете и начертайте графа на Туран. Обяснете връзката на графа с теоремата.

Задача 6. Колко най-много ребра може да има неориентиран планарен граф с n върха (без примки и кратни ребра), несъдържащ прости цикли с дължини 3 и 4 ?

Задача 7. Докажете, че броят на триъгълниците в неориентиран граф (без примки и кратни ребра) е равен на 1/6 от сбора на третите степени на собствените стойности на матрицата на съседствата на графа.

Задача 8. Пребройте неизоморфните графи с четири неномерирани върха по два начина: непосредствено (начертайте ги) и чрез лемата на Бърнсайд.