Примерни решения на задачите от семестриалното контролно по ДС на 23 април 2023 г.

Зад. 1 Даден е прав кръгов цилиндър с радиус на основата 1 и височина 7. Докажете, че за всеки 10 точки от цилиндъра е вярно, че поне две от тях са на разстояние, по-малко или равно на $\sqrt{5}$ една от друга.

Решение: Да си представим, че цилиндърът е "нарязан" на 7 конгруентни цилиндъра $C_1, \ldots, C_7$, всеки с височина 1, чрез шест равнини, успоредни на основите. Лесно се вижда, че във всеки C_i, всеки две точки са на разстояние по-малко или равно на $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, понеже сечението на C_i с равнина, съдържаща оста на C_i, е правоъгълник със страни с дължини 1 и 2. Прилагаме принципа на Дирихле, като точките са ябълките, а $C_1, \ldots, C_7$ са чекмеджетата. Съгласно принципа на Дирихле, поне две от десетте точки са в един и същи C_i, което означава, че са на разстояние $\leq \sqrt{5}$ една от друга.

Забележка: твърдението е вярно и за 8 точки.

Зад. 2 Завод за велосипеди е произвел 2 000 велосипеда. Тези велосипеди са напълно еднакви с изключение може би на цвета. Заводът разполага с бои от 24 цвята. Всеки велосипед трябва да бъде боядисан в точно един от двадесет и четирите цвята. По колко различни начина може да бъдат боядисани велосипедите? Допуснете, че заводът разполага с неограничени количества боя от всеки цвят.

Решение: Нека x_1 е броят на велосипедите от първия цвят, x_2 е броят на велосипедите от втория цвят, и така нататък, x_{24} е броят на велосипедите от двадесет и четвъртия цвят, като $x_i \geq 0$ за $1 \leq i \leq 24$. Очевидно

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{24} = 2\,000$$

и търсеният отговор е броят на решенията на това уравнение в естествени числа. Съгласно изучаваното на лекции, това е броят на разполагания на 2 000 анонимни топки в 24 именувани кутии и той е

$$\binom{2\,000 + 24 - 1}{24 - 1} = \binom{2\,023}{23}$$

Численият отговор, който не се иска, е

$$372\,301\,463\,119\,136\,104\,684\,488\,113\,308\,930\,244\,737\,961\,458\,177\,072\,626 \approx 3 \times 10^{54}$$

Зад. 3 Нека $S = \{a, b\}$. Припомнете си, че "фамилия над S" е всеки елемент на 2^{2^S}.

1. Напишете в явен вид всички фамилии над S.
2. Напишете в явен вид всички покривания на S.
3. Използвайки комбинаторния принцип на включването и изключването, намерете формула за броя на покриванията на произволно n-елементно множество, където $n \in \mathbb{N}^+$.
4. Заместете n с 2 в току-що изведената формула и намерете числената стойност. Тя съвпада ли с броя на покриванията на S?

Решение: Очевидно

$$2^S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Ето всички фамилии над $\{a, b\}$:

$$\begin{array}{llll}
F_0 = \emptyset & & & \\
F_1 = \{\emptyset\} & F_2 = \{\{a\}\} & F_3 = \{\{b\}\} & F_4 = \{\{a, b\}\} \\
F_5 = \{\emptyset, \{a\}\} & F_6 = \{\emptyset, \{b\}\} & F_7 = \{\emptyset, \{a, b\}\} & \\
F_8 = \{\{a\}, \{b\}\} & F_9 = \{\{a\}, \{a, b\}\} & F_{10} = \{\{b\}, \{a, b\}\} & \\
F_{11} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\} & F_{12} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\} & F_{13} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\} & F_{14} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \\
F_{15} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} & & &
\end{array}$$

Не всички фамилии измежду F_0, …, F_{15} са покривания. Първо, покриванията не може да съдържат като елемент празното множество. Тогава F_1, F_5, F_6, F_7, F_{11}, F_{12}, F_{13} и F_{15} не се покривания. Второ, обединението на елементите на покриване трябва да е $\{a, b\}$. Тогава F_0, F_2 и F_3 също не са покривания. Тогава покриванията са F_4, F_8, F_9, F_{10} и F_{14}:

$$F_4 = \{\{a, b\}\} \quad F_8 = \{\{a\}, \{b\}\} \quad F_9 = \{\{a\}, \{a, b\}\} \quad F_{10} = \{\{b\}, \{a, b\}\} \quad F_{14} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Сега да намерим броя на покриванията на n-елементно множество Нека името на множеството е A. Да кажем, че $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, като $n \geq 1$. Знаем, че $|2^A| = 2^n$. Тогава броят на всички фамилии над A е точно 2^{2^n}. Покриванията обаче не може да съдържат празното множество, а знаем, че $\emptyset \in 2^A$. Очевидно е, че $|2^A \setminus \emptyset| = 2^n - 1$.

И така, универсумът за целите на тази задача е $U = 2^{2^A \setminus \emptyset}$, като $|U| = 2^{2^n - 1}$. Забележете, че универсумът съдържа празната фамилия $\{\,\}$, тоест празното множество; това, което универсумът не може да съдържа, е, примерно, $\{\{\,\}\} = \{\emptyset\}$.

Естествено, не всеки елемент на U представлява покриване. От мощността на универсума ще изважим броя на фамилиите, които не покриват опорното множество в смисъл, че обединението им не е A. Ще направим това изваждане съгласно принципа на включването и изключването.

Нека X_i е множеството от фамилиите от U, които не покриват a_i, за произволно $i \in \{1, \ldots, n\}$; с други думи, които не съдържат елемент, съдържащ a_i. Тогава X_i е множеството от фамилиите над $A \setminus \{a_i\}$, които не съдържат празното множество. Тъй като $|A \setminus \{a_i\}| = n - 1$, в сила е $X_i = 2^{2^{A \setminus \{a_i\}} \setminus \emptyset}$. Тогава

$$|X_i| = 2^{2^{n-1} - 1}$$

Този резултат остава в сила дори при $n = 1$: тогава дясната страна е 1, което е коректно, понеже фамилията, непокриваща единствения елемент a_1, е $\{\,\}$.

Тогава $X_i \cap X_j$ е множеството от фамилиите от U, които не покриват a_i и не покриват a_j, за някакви i и j, такива че $1 \leq i < j \leq n$. В сила е

$$|X_i \cap X_j| = 2^{2^{n-2} - 1}$$

И изобщо, $X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_k}$ е множеството от фамилиите от U, които не покриват нито един от елементите $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$, за някакви $i_1, \ldots, i_k$, такива че $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, където $1 \leq k \leq n$. В сила е

$$|X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_k}| = 2^{2^{n-k}-1}$$

Принципът на включване и изключване казва, че търсеният отговор е

$$\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} |X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_k}| = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}-1} \tag{1}$$

където при $k = 0$ събираемото е $|U|$, а множителят $\binom{n}{k}$ е равен на броя на начините да изберем $i_1, \ldots, i_k$ от $\{1, \ldots, n\}$.

И накрая, да изчислим стойността на (1) при $n = 2$:

$$\sum_{0 \leq k \leq 2} (-1)^k \binom{2}{k} 2^{2^{2-k}-1} =$$
$$(-1)^0 \binom{2}{0} 2^{2^{2-0}-1} + (-1)^1 \binom{2}{1} 2^{2^{2-1}-1} + (-1)^2 \binom{2}{2} 2^{2^{2-2}-1} =$$
$$1 \times 1 \times 2^{2^2-1} + (-1) \times 2 \times 2^{2^1-1} + 1 \times 1 \times 2^{2^{-0}-1} =$$
$$2^{4-1} - 2 \times 2^{2-1} + 2^{1-1} =$$
$$8 - 4 + 1 =$$
$$5$$

И наистина, ние намерихме точно пет покривания на $\{a, b\}$.

Зад. 4 Докажете, че следните съставни съждения са еквивалентни:

$$A = \neg\big((p \to q) \wedge (\neg(p \to r) \vee (\neg q \wedge \neg r))\big)$$
$$B = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee r$$

а) с табличния метод,

б) чрез еквивалентни преобразувания.

Решение: Първо ще го докажем с табличния метод.

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$\neg(p \to r)$	$\neg q \wedge \neg r$	$\neg(p \to r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$	A
F	F	F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	F	F	F	T
F	T	T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F	F	T
T	T	F	T	F	T	F	T	F
T	T	T	T	T	F	F	F	T

p	q	r	$\neg p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	B
F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	T
T	F	T	F	T	T
T	T	F	F	F	F
T	T	T	F	F	T

Равенството на последните колони в двете таблици влече $A \equiv B$.

Да покажем същото с еквивалентни преобразувания.

$\neg\big((p \to q) \wedge (\neg(p \to r) \vee (\neg q \wedge \neg r))\big) \equiv$ *// свойство на импл.*

$\neg\big((\neg p \vee q) \wedge (\neg(\neg p \vee r) \vee (\neg q \wedge \neg r))\big) \equiv$ *// з-н на De Morgan*

$\neg\big((\neg p \vee q) \wedge ((\neg\neg p \wedge \neg r)) \vee (\neg q \wedge \neg r))\big) \equiv$ *// з-н за двойното отрицание*

$\neg\big((\neg p \vee q) \wedge ((p \wedge \neg r)) \vee (\neg q \wedge \neg r))\big) \equiv$ *// дистр. на кон. спрямо диз.*

$\neg\big((\neg p \vee q) \wedge ((p \vee \neg q) \wedge \neg r)\big) \equiv$ *// з-н на De Morgan*

$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg((p \vee \neg q) \wedge \neg r) \equiv$ *// з-н на De Morgan*

$(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg(p \vee \neg q) \vee \neg\neg r) \equiv$ *// з-н на De Morgan*

$(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee ((\neg p \wedge \neg\neg q) \vee \neg\neg r) \equiv$ *// з-н за двойното отр.*

$(p \wedge \neg q) \vee ((\neg p \wedge q) \vee r) \equiv$ *// асоц. и комут. на дизюнкцията*

$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee r$

Зад. 5 Докажете по индукция по n, че за всяко цяло положително n е в сила

$$10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$$

Решение: Нека $P(n)$ е предикатът $\boxed{10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}}$, като домейнът на предиката е $\mathbb{N}^+$. Искаме да докажем $\forall n \in \mathbb{N}^+ : P(n)$.

Базата е $n = 1$. Разглеждаме $P(1)$. То е очевидно вярно, понеже

$$10^1 = 10 = 11 - 1 \equiv (-1)^1 \pmod{11}$$

Да допуснем, че за някое цяло положително n е в сила $P(n)$. Тогава са верни следните съждения:

$$10^n \equiv (-1)^n \pmod{11} \quad \textit{// от индуктивното предположение}$$
$$10^1 \equiv (-1) \pmod{11} \quad \textit{// от базата}$$

Умножаваме двете конгруенции и получаваме

$$10^n \times 10 \equiv (-1)^n \times (-1) \pmod{11}$$

Но това е точно $P(n+1)$:

$$10^{n+1} \equiv (-1)^{n+1} \pmod{11}$$

Доказахме $P(n+1)$, допускайки $P(n)$ и проверявайки $P(1)$. По принципа на математическата индукция, доказахме $\forall n \in \mathbb{N}^+ : P(n)$.

Зад. 6 Дадени са m различими (номерирани) топки и n различими (номерирани) кутии.

1. По колко начина може да бъдат разположени топките в кутиите, ако редът на слагане на топките в кутиите няма значение?

2. По колко начина може да бъдат разположени топките в кутиите, ако редът на слагане на топките в кутиите има значение? Последното означава това: представете си, че кутиите са прозрачни цилиндри с еднакъв вътрешен диаметър, а топките са сферични, с еднакъв диаметър, като диаметърът на топките е малко по-малък от вътрешния диаметър на цилиндрите. Щом пуснем топка в цилиндър, тя или пада на дъното, ако той е бил празен преди това, или застава върху последната топка, която е била пусната в цилиндъра преди това. Примерно, ако $m = 2$ и $n = 1$, следните две располагания са различни:

   - слагаме първо топка едно и после топка две,
   - слагаме първо топка две и после топка едно.

   Цилиндрите са достатъчно високи, така че не може да се препълнят.

Обосновете подробно отговорите си и на двете подусловия. Отговори без обосновки не получават точки.

Решение: Отговорът на първото подусловие е n^m. Разсъждаваме така: слагаме топките една след друга, без значение в какъв ред. При липса на ограничения, за първата топка има n кутии, в които може да я сложим, за втората също има n кутии, за третата също има n кутии, и така нататък, за последната също има n кутии, и по принципа на умножението броят на разполаганията е

$$\underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{m \text{ множителя}} = n^m$$

Другояче казано, всяко слагане на топките в кутиите е функция от m-елементен домейн (множеството от топките) в n-елементен кодомейн (множеството от кутиите). От лекции знаем, че броят на тези функции е n^m.

За второто подусловие разсъждаваме аналогично, но сега редът на слагане има значение. За първата топка има n възможности места, на които да се сложи: това са празните кутии-цилиндри.

За втората топка обаче възможностите са $n + 1$, а не n. Тъй като първата топка вече е сложена в някой цилиндър, ако втората топка се слага в същия цилиндър, тя може да се намира или отгоре на вече сложената, или отдолу. Това са различни възможности, щом държим сметка за реда на разполагането. Ако искате да ползвате аналогия с реалния свят, едната от тези две възможности се състои в изваждане на първата топка от въпросния цилиндър, слагане на втората на дъното и после първата върху втората.

За третата топка възможностите са $n + 2$. Независимо от това дали първите две топки са в един и същи цилиндър или не, има $n + 2$ различни места за слагане на третата топка.

И изобщо, за k-тата топка има $n - (k - 1)$ възможности.

По принципа на умножението, отговорът е

$$n \times (n+1) \times (n+2) \times \cdots \times (n+m-1) = \prod_{k=1}^{m} (n - k + 1)$$

Понякога това се бележи кратко така: $n^{\overline{m}}$.

По отношение на първото подусловие, ако кутията е само една, има само един начин за слагане на топките, независимо от това колко са на брой. По отношение на второто подусловие, ако кутията е само една, очевидно възможните располагания са $m!$. И наистина, n^m е 1 при $n = 1$, докато $n \times (n + 1) \times (n+2) \times \cdots \times (n+m-1)$ при $n = 1$ е $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times m = m!$.