КУРСОВ ПРОЕКТ
ПО ИЗБИРАЕМИЯ УЧЕБЕН ПРЕДМЕТ
“ИЗБРАНИ ГЛАВИ ОТ КОМБИНАТОРИКАТА
И ТЕОРИЯТА НА ГРАФИТЕ”

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ “СВЕТИ КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

ЛЕТЕН СЕМЕСТЪР НА 2022 / 2023 УЧЕБНА ГОДИНА

Задача 1. Докажете следните асимптотични формули:

а) Асимптотика на числата на Каталан: $C_n \sim \dfrac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$ при $n \to \infty$.

Упътване: Тръгнете от затворената формула за числата на Каталан, след това изразете биномния коефициент с помощта на факториели и приложете приближението на Стирлинг.

б) Асимптотика на числата на Ойлер за броя на зигзагообразните пермутации:

$A_n \sim 2\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{n+1} . \, n!$ при $n \to \infty$.

Упътване: Използвайте наготово формулата на Андре (доказана на лекции) за експоненциалната пораждаща функция на разглежданите числа на Ойлер. Намерете най-малката положителна особена точка a на функцията (т.е. точка, която анулира знаменателя) и изследвайте функцията в околност на точката a. За целта я представете като дроб със знаменател $a - x$, заместете числителя с границата му L при $x \to a$ (получава се асимптотично, а не точно равенство, затова пишете $\sim$ вместо $=$ при този преход). Дробния израз преработете така:

$$\frac{L}{a-x} = \frac{L}{a} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{x}{a}}.$$

Получената дробна функция развийте в степенен ред (по формулата за сбор на безкрайна геометрична прогресия). Накрая използвайте следното твърдение, известно като теорема за преноса: каквото е асимптотичното поведение на пораждащата функция в околност на най-малката положителна особена точка, такова е и асимптотичното поведение на коефициентите на степенния ред (тоест членовете на числовата редица) при $n \to \infty$.

в) Асимптотика на числата на Стирлинг от втори род:

За произволно допустимо, но фиксирано k важи асимптотичната формула $\left\{ n \atop k \right\} \sim \dfrac{k^n}{k!}$ при $n \to \infty$.

Упътване: Приближението е с излишък. Съобразете как е получен изразът в дясната страна, а след това докажете, че излишъкът е несъществен спрямо приближението.

Задача 2. Докажете следните комбинаторни тъждества:

а) С биномни коефициенти:

$$\sum_{k=-n}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k+n}^3 = \frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

б) С биномни коефициенти, числа на Стирлинг от втори род и числа на Бел:

$$B_{n+m} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left\{ {m \atop j} \right\} \binom{n}{k} j^{n-k} B_k.$$

Задача 3. Нека s е цяло положително число. Разглеждаме редица от цели положителни числа, определена с равенствата $a_1 = 0$, $a_2 = 2s$, $a_3 = 3$, $a_{n+3} = s\,a_{n+1} + a_n$ за всяко цяло $n \geq 1$. Докажете, че a_p се дели на p за всяко просто число p.

Упътване: Въпреки че даденото уравнение е линейно-рекурентно, не е добре да се опитвате да го решавате чрез характеристично уравнение: то се получава кубично и има параметър s. По принцип може да бъде решено с формулата на Кардано, но това само усложнява задачата. Затова е по-добре да поемете по заобиколен път. Очевидно a_n е полином на s. Означете с $b_{n\,;\,k}$ коефициента пред s^k. За $b_{n\,;\,k}$ ще получите рекурентно уравнение и начални условия, като в началните условия ще участват числата 2 и 3 (и 0), а рекурентното уравнение ще съдържа само действието събиране. Значи, $b_{n\,;\,k}$ е линейна комбинация на двойки и тройки с някакви цели коефициенти, тоест $b_{n\,;\,k} = 2\lambda_{n\,;\,k} + 3\mu_{n\,;\,k}$. Формули за $\lambda_{n\,;\,k}$ и $\mu_{n\,;\,k}$ се получават лесно, ако се досетите за комбинаторния смисъл на тези две величини. Разликите между индексите в рекурентното уравнение за $b_{n\,;\,k}$ подсказват смисъла на λ и μ.

Тази задача е от международното студентско състезание по математика “Ал-Хорезми”, проведено в Узбекистан през 2018 г.

ГРАФИ

Задача 4. Докажете следните варианти на теоремата на Менгер:
Ако x и y са два конкретни върха в краен неориентиран граф, то:

а) най-малкият брой ребра, които трябва да се премахнат, за да няма път между x и y, съвпада с най-големия брой пътища между x и y, които два по два нямат общи ребра;

б) ако между върховете x и y няма ребро, то най-малкият брой върхове, които трябва да се изтрият (с излизащите от тях ребра), за да няма път между x и y, съвпада с най-големия брой пътища между x и y, които два по два нямат общи върхове, различни от x и y.

Забележки към втората част на теоремата:

— Не е позволено да се изтриват самите върхове x и y.

— Ясно е, че ако между върховете x и y има ребро, те не могат да бъдат отделени чрез изтриване на върхове.

С подходящ пример покажете разликата между частите на теоремата, тоест покажете два пътя с общи краища, които нямат общи ребра, обаче имат общи върхове, различни от краищата. Възможно ли е обратното?

Задача 5. Формулирайте и докажете теоремата на Туран. Определете и начертайте графа на Туран. Обяснете връзката на графа с теоремата.

Задача 6. Колко най-много ребра може да има неориентиран планарен граф с n върха (без примки и кратни ребра), несъдържащ прости цикли с дължини 3 и 4 ?

Задача 7. Докажете, че броят на триъгълниците в неориентиран граф (без примки и кратни ребра) е равен на 1/6 от сбора на третите степени на собствените стойности на матрицата на съседствата на графа.

Задача 8. Пребройте неизоморфните графи с четири неномерирани върха по два начина: непосредствено (начертайте ги) и чрез лемата на Бърнсайд.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Прилагаме указанията от упътванията.

а) $$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}\,e^{-2n}}{\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}\sqrt{2\pi(n+1)}\,(n+1)^{n+1}e^{-n-1}} =$$

$$= \frac{4^n n^n e}{\sqrt{\pi}\,(n+1)^{n+3/2}} = \frac{4^n n^n e}{\sqrt{\pi}\,(n+1)^{3/2}(n+1)^n} = \frac{4^n e}{\sqrt{\pi}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n (n+1)^{3/2}} \sim$$

$$\sim \frac{4^n e}{\sqrt{\pi}\,e(n+1)^{3/2}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\,(n+1)^{3/2}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3/2} n^{3/2}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\;n^{3/2}}$$

при $n \to \infty$.

б) Според формулата на Андре експоненциалната пораждаща функция е

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{1+\sin x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1+\sin\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{\pi}{2} - x} = \frac{2}{\dfrac{\pi}{2} - x} =$$

$$= \frac{4/\pi}{1 - \dfrac{2x}{\pi}} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{2x}{\pi}} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1} x^n.$$

И така, $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \dfrac{x^n}{n!} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2\cdot\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{n+1} x^n$, откъдето следва, че

$\dfrac{A_n}{n!} \sim 2\cdot\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{n+1}$ при $n \to \infty$, тоест $A_n \sim 2\cdot\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{n+1} n!$ при $n \to \infty$.

в) По определение $\left\{ n \atop k \right\}$ е броят на начините, по които n номерирани предмета могат да се разбият на k неномерирани непразни подмножества (терминът "неномерирани" тук означава, че подмножествата нямат наредба, тоест те образуват множество, а не редица). Номерираме предметите с целите числа от 1 до n, а подмножествата — с целите числа от 1 до k. За всеки предмет има k подмножества, в които той може да бъде включен; тези възможности (за различни предмети) могат да се съчетаят всяка с всяка, затова прилагаме правилото за умножение: всички варианти са $\underbrace{k.k\ldots k}_{n\text{ пъти}} = k^n$.

Но така всяко разбиване на дадените n предмета е броено $k!$ пъти заради всевъзможните номерации (подредби) на подмножествата, които по условие са неномерирани. Ето защо делим получения брой на $k!$ и стигаме до формулата

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \approx \frac{k^n}{k!}.$$

Това е приближение, защото някои от всичките k подмножества може да са празни. Отстраняваме тези варианти с принципа за включване и изключване:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j^n.$$

В тази формула сумационният индекс j е броят на подмножествата, които могат да бъдат непразни, тоест подмножествата, в които е разрешено да се поставят предмети (останалите $k-j$ подмножества са задължително празни). Въпросните j подмножества можем да изберем по $\binom{k}{j}$ начина, а дадените n предмета можем да разпределим по избраните j подмножества по j^n начина (доказва се с правилото за умножение, както по-горе). За делението на $k!$ важи предишното обяснение.

Принципът за включване и изключване има разновидност с неравенство: могат да се вземат по-малко събираеми в сумата. Посоката на неравенството се определя от знака на последното взето събираемо, тоест тя се мени заедно с четността на сумационния индекс (което е естествено, тъй като в резултат на включването и изключването частичните суми се приближават до точната бройка ту с излишък, ту с недостиг). В конкретната задача важи неравенството

$$\frac{k^n}{k!} - \frac{(k-1)^n}{(k-1)!} \leq \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \leq \frac{k^n}{k!}.$$

За да докажем, че първото събираемо е главно по порядък, делим на него:

$$1 - k\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n \leq \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \Big/ \frac{k^n}{k!} \leq 1.$$

За произволно допустимо, но фиксирано k лявата и дясната страна клонят към 1 при $n \to \infty.$ Следователно същото важи и за средния израз, тоест

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \sim \frac{k^n}{k!} \text{ при } n \to \infty.$$

Задача 2. Има различни методи за доказване на комбинаторни тъждества.

а) Тъждеството

$$\sum_{k=-n}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k+n}^3 = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

е частен случай (при $b = c = n$) на друго тъждество:

$$\sum_{k} (-1)^k \binom{n+b}{n+k}\binom{n+c}{c+k}\binom{b+c}{b+k} = \frac{(n+b+c)!}{n!b!c!}$$

(b, c и n са произволни цели неотрицателни числа, а k пробягва целите числа от $-\min\{b, c, n\}$ вкл. до $+\min\{b, c, n\}$ вкл.). Всяко от равенствата се нарича тъждество на Диксън. Второто се доказва по метода на Уилф—Цейлбергер чрез сертификата $R(n,k) = (c+1-k)(b+1-k)/(2(n+k)(n+b+c+1))$.

б) Тъждеството

$$B_{n+m} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left\{ {m \atop j} \right\} \binom{n}{k} j^{n-k} B_k$$

се доказва с комбинаторни разсъждения. Имаме m червени и n сини предмета. По колко начина можем да ги разделим на купчини? Купчините са произволно много, не са номерирани (тоест налице е множество, а не редица от купчини), предметите във всяка купчина нямат наредба (т.е. всяка купчина е множество, а не редица от предмети). Няма значение колко червени и колко сини предмета слагаме във всяка купчина. Задължително е само да няма празни купчини. Броят на вариантите е числото на Бел B_{n+m} в лявата страна на тъждеството.

В дясната страна на тъждеството вариантите са преброени по видове, което обяснява сумирането (тук се прилага комбинаторното правило за събиране). Дадените m червени предмета се разделят на j купчини по $\left\{ {m \atop j} \right\}$ начина според смисъла на числата на Стирлинг от втори род (понеже j не е дадено, накрая сумираме по допустимите стойности на j, като случаят $j = 0$ е предвиден заради възможността $m = 0$). От общо n сини предмета можем по $\binom{n}{k}$ начина да изберем k, които няма да бъдат слагани в купчините с червени предмети (понеже k не е дадено, накрая сумираме по всички допустими стойности). Избраните k сини предмета слагаме по B_k начина на отделни купчини, в които няма червени предмети. Останалите $n - k$ сини предмета отиват при червените, т.е. за всеки от тях се избира една от j купчини, оттук идва множителят j^{n-k}.

Задача 3 се доказва по метода, описан в упътването. Комбинаторният смисъл на λ и μ е, че те означават брой пътища в целочислена решетка; индексите им се тълкуват като (целочислени) координати на точки в равнината. Формулата за броя на пътищата от съответния вид поражда затворени формули за λ и μ (където те са записани с биномни коефициенти). Опростяването на формулите позволява да се стигне лесно до заключението за делимост.

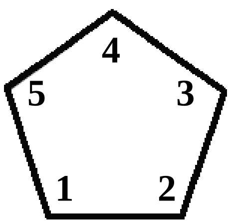
ГРАФИ

Задача 4 и задача 5. Теоремата на Менгер и теоремата на Туран са известни твърдения, чиито доказателства могат да бъдат намерени в учебната литература.

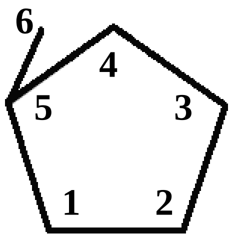
Задача 6. Ако планарен граф е несвързан, винаги можем да добавим ребра между компонентите му, при което графът става свързан, остава планарен и не възникват нови върхове, кратни ребра, примки и цикли с дължини 3 и 4. Понеже търсим възможно най-големия брой ребра, можем без ограничение да предположим, че графът е свързан. Нека графът има n върха и m ребра и едно негово вписване в равнината я разделя на f области, в чийто брой се включва също така външната (тоест неограничената) част от равнината. Щом като графът не съдържа примки, кратни ребра и цикли с дължини 3 и 4, то всяка област, оградена от ребрата на графа (включително неограничената) има контур, съставен от поне пет ребра. Нека съберем бройките на ребрата по контурите на всички области. Получава се сбор S, не по-малък от $5f$, в който всяко ребро е броено не повече от два пъти — когато разделя две области (мостовете не са броени нито веднъж, понеже не участват в цикли). Ето защо $2m \geq S \geq 5f$, значи $f \leq 2m / 5$. За всеки свързан планарен граф важи известната формула на Ойлер: $n - m + f = 2$, тоест $f = m - n + 2$. Тогава $m - n + 2 \leq 2m / 5$, откъдето следва, че $m \leq 5(n-2) / 3$, тоест $m \leq \lfloor 5(n-2)/3 \rfloor$.

Горните разсъждения не обхващат случая $f = 1$. Тогава няма цикли, тоест не може да се говори за контур на единствената област. В този случай графът е дърво, така че $m = n - 1$, откъдето при $n \geq 4$ следва, че пак $m \leq \lfloor 5(n-2)/3 \rfloor$. За графите с един, два, три или четири върха задачата не е интересна: не могат да съдържат цикли, следователно са дървета и имат $n - 1$ ребра (този брой е максималният и се достига при свързан граф, тоест дърво; при несвързан граф ребрата са още по-малко). При $n = 4$ двете горни граници съвпадат.

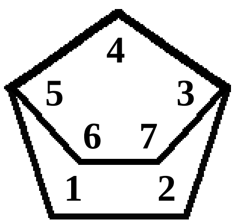
Нека $n \geq 5$. Вече беше доказано, че $m \leq \lfloor 5(n-2)/3 \rfloor$. Това е максимумът, защото следните конструкции показват, че тази горна граница е достижима.



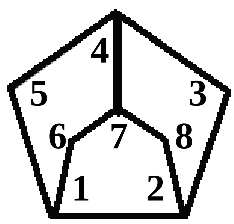
$n = 5$
$m = 5$



$n = 6$
$m = 6$



$n = 7$
$m = 8$



Стъпка: от n към $n + 3$.
Делим един петоъгълник на три петоъгълника.

Задача 7. Сборът от собствените стойности на матрица е равен на т.нар. следа на матрицата (сбора от елементите върху главния диагонал). Наистина, собствените стойности на матрица са точно корените на характеристичния полином на матрицата. Старшият му коефициент е 1 и от формулите на Виет следва, че сборът от собствените стойности е противоположен на коефициента пред втората най-висока степен на променливата на полинома. От друга страна, от определението на характеристичен полином е ясно, че същият коефициент е противоположен на следата на матрицата. Следователно тя е равна на сбора от собствените стойности на матрицата.

Освен това при степенуване на матрица се степенуват със същия показател и нейните собствени стойности. Действително, ако $\vec{v}$ и λ са двойка от собствен вектор и собствена стойност на матрицата A, то $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ и след многократно прилагане на това равенство получаваме следната редица от равенства:

$A^2\,\vec{v} = (AA)\vec{v} = A(A\vec{v}) = A(\lambda\vec{v}) = (\lambda A)\vec{v} = \lambda(A\vec{v}) = \lambda(\lambda\vec{v}) = (\lambda\lambda)\vec{v} = \lambda^2\,\vec{v}$;

$A^3\,\vec{v} = (AA^2)\vec{v} = A(A^2\,\vec{v}) = A(\lambda^2\,\vec{v}) = (\lambda^2 A)\vec{v} = \lambda^2(A\vec{v}) = \lambda^2(\lambda\vec{v}) = \lambda^3\,\vec{v}$;

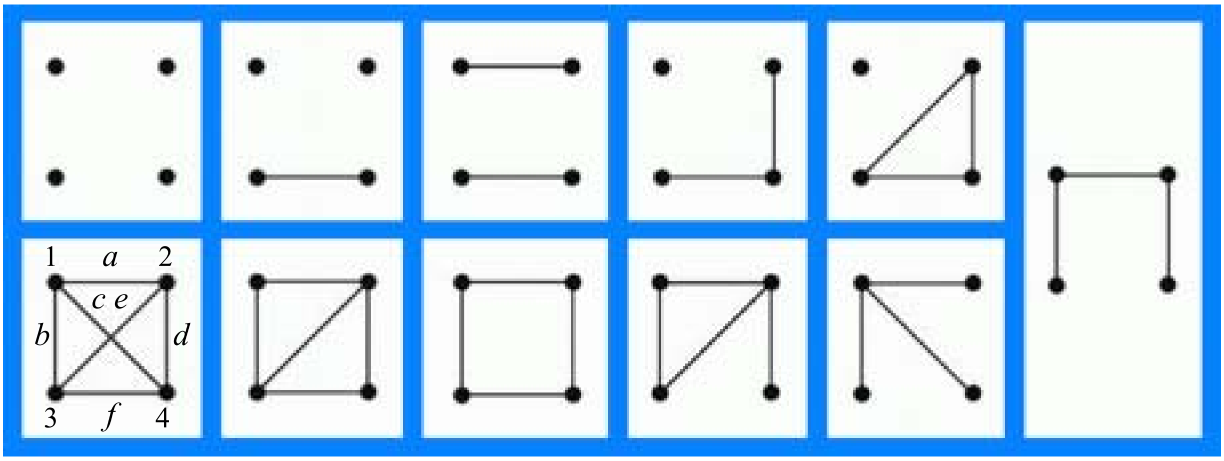
$A^4\,\vec{v} = (AA^3)\vec{v} = A(A^3\,\vec{v}) = A(\lambda^3\,\vec{v}) = (\lambda^3 A)\vec{v} = \lambda^3(A\vec{v}) = \lambda^3(\lambda\vec{v}) = \lambda^4\,\vec{v}$;

. . . .

Формалното доказателство се извършва с помощта на математическа индукция по степенния показател. Ние имаме нужда само от равенството $A^3\,\vec{v} = \lambda^3\,\vec{v}$: от него следва, че сборът от третите степени на собствените стойности на A е всъщност сборът от собствените стойности на матрицата A^3, а той съвпада със сбора от елементите по главния диагонал на матрицата A^3. Тези елементи са точно бройките на циклите с дължина 3 (тоест триъгълниците), съдържащи съответните върхове на графа, ако A е неговата матрица на съседствата (това е добре известен факт от теорията на графите). Само че въпросната теорема важи поначало за ориентирани графи. Тук я прилагаме към неориентиран граф, затова всеки цикъл се оказва броен два пъти при всеки свой връх — за всяка от двете възможни посоки на движение. С други думи, всеки елемент върху главния диагонал на матрицата A^3 е удвоеният брой неориентирани цикли с дължина 3, съдържащи съответния връх на графа. Сборът от тези елементи брои всеки триъгълник не два, а шест пъти — по три пъти за всеки негов връх. Следователно броят на триъгълниците е равен на една шеста от този сбор.

Пример: Графът K_3, който е един триъгълник, има матрица на съседствата със собствени стойности 2, –1, –1. Наистина, $[\,2^3 + (-1)^3 + (-1)^3\,] \,/\, 6 = 1$.

Задача 8. Съществуват точно единайсет неизоморфни неориентирани графа с четири неномерирани (неразличими) върха. Единайсетте графа изглеждат по начина, показан на картинката. Пет от тях са допълнения на други пет, а един (в най-десния стълб на таблицата) е изоморфен на допълнението си.



Броят им може да се получи чрез лемата на Бърнсайд по следния начин. Вместо да мислим, че между два върха на графа има или няма ребро, е по-добре да си представяме, че ребро има между всеки два върха (тоест графът е пълен), но някои ребра са черни, а други — бели. Бели са именно липсващите ребра. Задачата се свежда до преброяване на оцветяванията с два цвята на ребрата на пълния граф с четири върха. Броенето е с точност до разместване на върховете. Ребрата се разместват така, че общ връх остава общ. От всички $P_6 = 6! = 720$ пермутации на ребрата допустими са $P_4 = 4! = 24$, породени от пермутациите на върховете.

Пермутации	
на върховете	на ребрата
(1)(2)(3)(4)	(a)(b)(c)(d)(e)(f)
(123)(4)	(aeb)(cdf)
(132)(4)	(abe)(cfd)
(124)(3)	(adc)(bef)
(142)(3)	(acd)(bfe)
(134)(2)	(bfc)(aed)
(143)(2)	(bcf)(ade)
(234)(1)	(efd)(abc)
(243)(1)	(edf)(acb)
(12)(34)	(a)(f)(ce)(bd)
(13)(24)	(b)(d)(ce)(af)
(14)(23)	(c)(e)(bd)(af)

Пермутации	
на върховете	на ребрата
(12)(3)(4)	(a)(f)(be)(cd)
(13)(2)(4)	(b)(d)(ae)(cf)
(14)(2)(3)	(c)(e)(ad)(bf)
(23)(1)(4)	(c)(e)(ab)(df)
(24)(1)(3)	(b)(d)(ac)(ef)
(34)(1)(2)	(a)(f)(bc)(de)
(1234)	(aefc)(bd)
(1324)	(bedc)(af)
(2134)	(abfd)(ce)
(2314)	(ebcd)(af)
(3124)	(badf)(ce)
(3214)	(eacf)(bd)

Сред пермутациите на ребрата има една с шест цикъла, девет с четири цикъла, и четиринайсет с два цикъла. По лемата на Бърнсайд има $(k^6 + 9k^4 + 14k^2) / 24$ неизоморфни оцветявания с k цвята на ребрата на пълния граф с четири върха. При $k = 2$ се получават $(2^6 + 9 . 2^4 + 14 . 2^2) / 24 = 11$ оцветявания.