Допускане на противното

Задача 7. За всяко $a \in \mathbb{Z}$, ако a^2 е четно, то a е четно.

Док. Твърдението може да се запише като

$$(\forall a \in \mathbb{Z})[a^2 \text{ е четно } \rightarrow \ a \text{ е четно}].$$

Да допуснем противното, т.е.

$$(\exists a \in \mathbb{Z})[a^2 \text{ е четно } \wedge \ a \text{ не е четно}].$$

Да вземем едно такова a. Тогава $a = 2k + 1$, за някое $k \in \mathbb{Z}$ и

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1,$$

което очевидно е нечетно число. Но ние допуснахме, че a^2 е четно. Така достигаме до противоречие, следователно нашето допускане е грешно и

$$(\forall a \in \mathbb{Z})[a^2 \text{ е четно } \rightarrow \ a \text{ е четно}].$$

□

Задача 8. Докажете, че:

а) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ не са рационални числа.

б) $\sqrt{pq}$ и $\sqrt{\frac{p}{q}}$ не са рационални числа, където p и q са прости числа.

в) $log_2 3$ не е рационално.

Док.

а) Да допуснем, че $\sqrt{2}$ е рационално число. Тогава съществуват $a, b \in \mathbb{Z}$, такива че:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Без ограничение, можем да приемем, че a и b са естествени числа, които нямат общи делители, т.е. не можем да съкратим дробта $\frac{a}{b}$. Получаваме, че

$$2b^2 = a^2.$$

Тогава a^2 е четно число и следователно a е четно число, защото произведение на две нечетни числа е нечетно число. Нека $a = 2k$. Получаваме, че

$$2b^2 = 4k^2,$$

от което следва, че

$$b^2 = 2k^2.$$

Това означава, че b също е четно число, $b = 2n$. Следователно, a и b са четни числа и имат общ делител 2, което е противоречие с нашето допускане. Така достигаме до противоречие. Накрая заключаваме, че $\sqrt{2}$ не е рационално число.

□

Индукция върху $\mathbb{N}$

Доказателството с индукция по $\mathbb{N}$ представлява следната схема:

$$\frac{P(0) \qquad (\forall x \in \mathbb{N})[P(x) \to P(x+1)]}{(\forall x \in \mathbb{N})P(x)}$$

Това означава, че ако искаме да докажем, че свойството $P(x)$ е вярно за всяко $x \in \mathbb{N}$, то трябва да докажем първо, че $P(0)$ и след това ако $P(x)$ вярно, то също така е вярно $P(x+1)$.

Задача 9. Докажете, че:

а) 3^n е нечетно;

б) $n < 2^n$;

в) $2^n < n!$ за $n \geq 4$;

г) $3|(n^3 - n)$;

$a|b \quad \leftrightarrow \quad (\exists c \in \mathbb{N})(b = c \cdot a)$

д) $6|(n^3 + 11n)$;

е) $9|(2^{2n} + 15n - 1)$;

ж) $57|(7^{n+2} + 8^{2n+1})$;

з) за всяко крайно множество A, ако $|A| = n$, то $|\mathscr{P}(A)| = 2^n$;

$\mathscr{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

$|A|$ - брой елементи на A

$|\mathscr{P}(A)|$ - брой на подмножествата на A

и) $C \setminus \bigcup_{i=0}^{n} A_i = \bigcap_{i=0}^{n}(C \setminus A_i)$;

к) $C \setminus \bigcap_{i=0}^{n} A_i = \bigcup_{i=0}^{n}(C \setminus A_i)$;

л) ако $(\forall i \leq n)[A_i \subseteq B_i]$, то $\bigcap_{i=0}^{n} A_i \subseteq \bigcap_{i=0}^{n} B_i$;

м) ако $(\forall i \leq n)[A_i \subseteq B_i]$, то $\bigcup_{i=0}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} B_i$;

н) $(\bigcap_{i=0}^{n} A_i) \cup B = \bigcap_{i=0}^{n}(A_i \cup B)$;

о) $(\bigcup_{i=0}^{n} A_i) \cap B = \bigcup_{i=0}^{n}(A_i \cap B)$;

п) $\bigcap_{i=0}^{n}(A_i \setminus B) = (\bigcap_{i=0}^{n} A_i) \setminus B$;

р) $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \;\leftrightarrow\; (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n)$;

с) $\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \;\leftrightarrow\; (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n)$;

т) $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$;

у) $\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$ за $r \neq 1$;

ф) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$;

х) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

ц) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

ч) $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;

ш) $\sum_{i=0}^{n}(2i+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$;

щ) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$;

ю) $\sum_{i=0}^{n}(-\frac{1}{2})^i = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3\cdot 2^n}$;

Задача 10. Нека да положим $H_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$. Проверете:

Наричат се хармонични числа

а) $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$.

б) $H_{2^k} \geq 1 + k/2$, за всяко $k \geq 0$.

Пълна индукция върху $\mathbb{N}$

Доказателство с пълна индукция по $\mathbb{N}$ за свойството P представлява следната схема:

$$\frac{(\forall x \in \mathbb{N})[(\forall y \in \mathbb{N})[y < x \ \to P(y)] \to P(x)]}{(\forall x \in \mathbb{N})P(x)}$$

Нека да проверим принципа за пълна индукция. Да допуснем, че принципът не е верен, т.е. за някое свойство P е изпълнено, че

$$(\forall x \in \mathbb{N})[(\forall y \in \mathbb{N})[y < x \ \to P(y)] \to P(x)] \ \wedge \ (\exists x \in \mathbb{N})\neg P(x).$$

Да вземем най-малкия елемент x_0, за който $\neg P(x_0)$. Тогава

$$(\forall y \in \mathbb{N})[y < x_0 \ \to P(y)]$$

и следователно:

$$\frac{(\forall y \in \mathbb{N})[y < x_0 \ \to P(y)] \qquad \dfrac{(\forall x \in \mathbb{N})[(\forall y \in \mathbb{N})[y < x \ \to P(y)] \to P(x)]}{(\forall y \in \mathbb{N})[y < x_0 \ \to P(y)] \to P(x_0)}}{P(x_0)}$$

Така достигаме до противоречие, защото получаваме, че $P(x_0) \wedge \neg P(x_0)$.

Задача 11. Докажете, че за всяко $x, y \in \mathbb{N}$

$$f(x,y) = x^y,$$

където

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \ \wedge \ y = 0 \\ f(x,y-1) * x, & x \neq 0 \ \wedge y \text{ е нечетно} \\ f(x,y/2) * f(x,y/2), & x \neq 0 \ \wedge y \text{ е четно} \end{cases}$$

Задача 12. Всяко естествено число $n \geq 2$ може да се запише като произведение на прости числа.

Док.

а) За $n = 2$ е ясно.

б) Ако $n+1$ е просто число, то всичко е ясно. Ако $n+1$ е съставно, то

$$n+1 = n_1 \cdot n_2.$$

Тогава $n_1 = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ и $n_2 = q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r}$, където $p_1, \dots, p_k$ и $q_1, \dots, q_r$ са прости числа. Тогава е ясно, че n също е произведение на прости числа.

$\square$

Задача 13. Нека фунцкията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е определена като

$$f(x) = x - 10, x > 100$$
$$f(x) = f(f(x+11)), x < 100.$$

Докажете, че $(\forall x \leq 100)[f(x) = 91]$.

Индукция върху $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Определение 1. Определяме лексикографската наредба $\prec$ върху $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ като

$$\langle x, y \rangle \prec \langle x', y' \rangle \quad \leftrightarrow \quad x < x' \vee (x = x' \ \wedge \ y < y').$$

Наричаме двойката $\langle x_0, y_0 \rangle$ *минимална* за множеството $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ако

$$\langle x_0, y_0 \rangle \in A \ \wedge \ (\forall \langle x, y \rangle \in A)[\langle x, y \rangle \not\prec \langle x_0, y_0 \rangle].$$

Твърдение 1. Всяко непразно подмножество $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ притежава поне един *минимален* елемент.

Твърдение 2. Не съществуват безкрайни строго намаляващи редици относно $\succ$ в $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, т.е. не съществува

$$\langle x_0, y_0 \rangle \succ \langle x_1, y_1 \rangle \succ \langle x_2, y_2 \rangle \succ \cdots \succ \langle x_n, y_n \rangle \succ \dots$$

Определение 2. Доказателството с индукция върху $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ представлява следната схема:

$$\frac{(\forall \langle x, y \rangle)[(\forall \langle x', y' \rangle)[\langle x', y' \rangle \prec \langle x, y \rangle \ \to \ P(x', y')] \ \to P(x, y)]}{\forall \langle x, y \rangle P(x, y)}$$

Да проверим схемата. Да допуснем, че тя не е вярна, т.е. за някое свойство P е изпълнено, че

$$(\forall \langle x, y \rangle)[(\forall \langle x', y' \rangle)[\langle x', y' \rangle \prec \langle x, y \rangle \ \to \ P(x', y')] \ \to P(x, y)],$$

но

$$\exists \langle x, y \rangle \neg P(x, y),$$

т.е. съществува $\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, за което $\neg P(x, y)$. Да разгледаме

$$A = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \neg P(x, y)\}.$$

Щом A е непразно, то A има минимален елемент $\langle x_0, y_0 \rangle$. Тогава

$$(\forall \langle x', y' \rangle)[\langle x', y' \rangle \prec \langle x_0, y_0 \rangle \ \to P(x', y')].$$

Но ние имаме, че

$$(\forall \langle x', y' \rangle)[\langle x', y' \rangle \prec \langle x_0, y_0 \rangle \ \to \ P(x', y')] \ \to P(x_0, y_0).$$

Това означава, че $P(x_0, y_0)$, което е противоречие.

Забележка. За да докажем едно свойство P с индукция по лексикографската наредба върху $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, първо доказваме P за минималната двойка $\langle 0,0\rangle$. След това доказваме, че ако P е вярно за всички двойки $\langle x',y'\rangle \prec \langle x,y\rangle$, то P е вярно и за $\langle x,y\rangle$.

Задача 14. Докажете, че $f(x,y) = |x-y|$, където

$$f(x,y) = \begin{cases} y, & x = 0 \\ x, & y = 0 \\ f(x-1,y-1), & \text{иначе} \end{cases}$$

Док. Индукция по $(\mathbb{N}^2,\prec)$, където $\prec$ е лексикографската наредба. Имаме един минимален елемент $(0,0)$.

$$f(0,0) = 0 = |0-0|.$$

Да допуснем, че за всяко $(u,v) \prec (x,y)$,

$$f(u,v) = |u-v|.$$

Тогава ако $x > 0, y = 0$, то

$$f(x,0) = x = |x-0|.$$

Ако $x > 0, y > 0$, то

$$f(x,y) = f(x-1,y-1) = |x-1-y+1| = |x-y|.$$

□

Задача 15. Докажете, че $f(x,y) = \text{НОД}(x,y)$, където за $x,y \in \mathbb{N}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} f(x-y,y), & x > y \\ f(y,x), & x < y \\ x, & x = y. \end{cases}$$

Задача 16. Да определим следната редица: Числа на Фибоначи

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \ldots, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

Проверете:

а) $\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$;

б) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$;

в) $\sum_{i=1}^{2n} F_{i-1}F_i = F_{2n}^2$;

г) единствено членовете от вида F_{3n} са четни;

д) за $n > 0$, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$;

е) $F_{m+n} = F_{m-1}\cdot F_n + F_m \cdot F_{n-1}$;

ж) ако $m|n$, то $F_m|F_n$.

з) ако $n \geq 3$, то $F_n > \phi^{n-2}$, където $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Използвайте, че $\phi^2 = \phi + 1$

Задача 17. Нека положим $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$. Проверете:

Нютонов бином

а) $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$;

б) $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$;

в) $\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}$;

Задача 18. Докажете, че за всеки $m, n \in \mathbb{N}$ съществуват $p, q \in \mathbb{Z}$, такива че

$$p \cdot m + q \cdot n = \text{НОД}(m, n).$$