Примерни решения на задачите от изпита по Дискр. Стр-ри на Информатика, 12 юни 2023 г.

Зад. 1 Решете рекурентното уравнение

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 1, \\ 2, & \text{ако } n = 2, \\ 6, & \text{ако } n = 3, \\ (n^3 - 3n^2 + 2n)a_{n-3}, & \text{ако } n \geq 4 \end{cases}$$

Решение: Това уравнение не е с константни коефициенти и не подлежи на решаване чрез метода с характеристичното уравнение. Съгласно изучаваното на лекции, да решим рекурентно уравнение означава да намерим израз, еквивалентен да дадения, но без рекурсия в себе си. Да видим колко е a_n за $n = 4, 5, 6$.

$$a_4 = (4^3 - 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4)a_1 = (64 - 48 + 8) \cdot 1 = 24$$
$$a_5 = (5^3 - 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5)a_2 = (125 - 75 + 10) \cdot 2 = 120$$
$$a_6 = (6^3 - 3 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6)a_3 = (216 - 108 + 12) \cdot 6 = 720$$

Изглежда, че $a_n = n!$. Ще докажем това със силна индукция по n.

Твърдим, че за всяко цяло положително n, $a_n = n!$. Базата е за $n = 1, 2, 3$. Наистина, по определение $a_1 = 1!$, $a_2 = 2!$ и $a_3 = 3!$. Трите базови случаи са доказани.

Да допуснем, че за някое $n \geq 4$ е вярно, че за всяко $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ е в сила $a_k = k!$. Разглеждаме a_n. Тъй като $n \geq 4$, по определение:

$$a_n = (n^3 - 3n^2 + 2n)a_{n-3}$$

Но $n-3$ е в множеството $\{1, \ldots, n-1\}$, така че индуктивното предположение е в сила за a_{n-3}. Съгласно индуктивното предположение, $a_{n-3} = (n-3)!$. Заместваме и получаваме

$$a_n = (n^3 - 3n^2 + 2n)(n-3)!$$

Но $n^3 - 3n^2 + 2n = n(n^2 - 3n + 2) = n(n-1)(n-2)$. Тогава

$$a_n = n(n-1)(n-2)(n-3)!$$

Но $n(n-1)(n-2)(n-3)! = n!$. Тогава $a_n = n!$. Доказахме по индукция, че $a_n = n!$ за всяко цяло положително n.

$\square$

Зад. 2 За всяко цяло положително k, нека D_k е безкрайното множество от графи, дефинирани чрез следната индуктивна дефиниция.

- База: всяка $(k+1)$-клика принадлежи на D_k.
- Индуктивна стъпка: ако $G = (V, E)$ приналежи на D_k и U е k-клика в G и w е връх, който не е в G, то $G' = (V \cup \{w\}, E \cup E')$ е в D_k, където $E' = \bigcup_{a \in U} \{(a, w)\}$.

Ето задачата.

3 т. **а)** D_1 кой клас графи е?

6 т. **б)** Колко ребра има всеки граф $G \in D_2$ като функция на броя на върховете?

10 т. **в)** Докажете, че всеки $G \in D_2$ е планарен.

6 т. **г)** Колко ребра има всеки граф $G \in D_3$ като функция на броя на върховете?

15 т. **д)** Опровергайте, че всеки $G \in D_3$ е планарен.

10 т. **е)** За всяко цяло положително k, намерете $\min \{\chi(G) \mid G \in D_k\}$ и $\max \{\chi(G) \mid G \in D_k\}$.

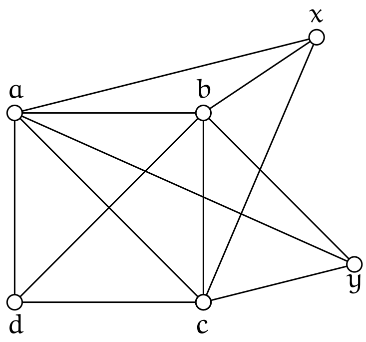
Решение: **а):** D_1 са дърветата без тривиалния граф. Посочената индуктивна дефиниция е почти същата като изучаваната на лекции индуктивна дефиниция на дърво, с малката разлика, че в горната дефиниция базата е $(1+1)$-клика, тоест 2-клика, тоест ребро, докато в дефиницията от лекции базата е връх. Изключвайки тази дребна разлика, индуктивната стъпка е същата и в двете дефиниции: добавя се нов връх w и w се прави съсед на точно един връх от графа, за който сме допуснали, че е в множеството. Забележете, че k-клика при $k = 1$ е един единствен връх.

б): Всеки граф от D_2 има точно $2n - 3$ ребра, където n е броят на върховете му. Доказателството е със структурна индукция по индуктивната дефиниция за $k = 2$. В базовия случай имаме $(2+1)$-клика, което е K_3, граф с точно 3 ребра. Наистина, $2 \cdot 3 - 3 = 3$. С което базата е доказана. Да допуснем, че графът G в индуктивната стъпка има точно $2n - 3$ ребра. Очевидно ребрата на новопостроения G' са с 2 повече от ребрата на G, понеже новодобавеният връх става съсед на точно два върха от G. Тогава броят на ребрата на G' е $2n - 3 + 2 = 2n - 1$. Но $2n - 1$ може да се представи като $2(n+1) - 3$. Но $n+1$ е броят на върховете на G'. Тогава броят на ребрата на G' е два пъти броят на върховете на G' минус три. С което доказахме желаното твърдение.

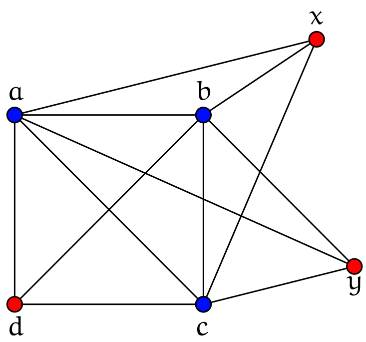
в): Ще докажем, че всеки граф $G \in D_2$ е планарен със структурна индукция. По-точно, ще докажем, че всеки $G \in D_2$ има планарно вписване. Очевидно графът K_3 от базата има планарно вписване. Допускаме, че графът G от индуктивната стъпка има планарно вписване. Както знаем от лекции, планарно вписване се дефинира чрез лицата си. Очевидно всяко планарно ребро е в точно две лица на планарното вписване. 2-кликата U е едно ребро в G. Съответното му планарно ребро е в точно две лица на вписването. Можем да добавим нов планарен връх, съответен на w, и да го сложим във вътрешността на кое да е от тези две лица и после да го свържем чрез две нови планарни ребра с планарните върхове, съответни на върховете от U по такъв начин, че тези две нови планарни ребра да лежат изцяло във вътрешността на въпросното лице, с изключение на крайните си точки. Конструирахме планарно вписване на G'.

г): Всеки граф от D_3 има точно $3n - 6$ ребра, където n е броят на върховете му. Доказателството е със структурна индукция по индуктивната дефиниция за $k = 3$. В базовия случай имаме $(3+1)$-клика, което е K_4, граф с точно 6 ребра. Наистина, $3 \cdot 4 - 6 = 6$. С което базата е доказана. Да допуснем, че графът G в индуктивната стъпка има точно $3n - 6$ ребра. Очевидно ребрата на новопостроения G' са с 3 повече от ребрата на G, понеже новодобавеният връх става съсед на точно три върха от G. Тогава броят на ребрата на G' е $3n - 6 + 3 = 3n - 3$. Но $3n - 3$ може да се представи като $3(n+1) - 6$. Но $n+1$ е броят на върховете на G'. Тогава броят на ребрата на G' е три пъти броят на върховете на G' минус шест. С което доказахме желаното твърдение.

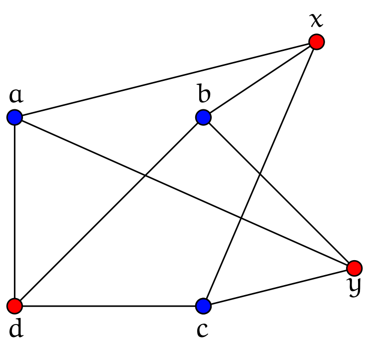
д): Ще покажем, че в D_3 има граф, който не е планарен. Да разгледаме следния граф:



Този граф може да бъде генериран от индуктивната дефиниция: примерно, K_4 в базовия случай е подграфът, индуциран от $\{a, b, c, d\}$, след което в индукнтивната стъпка се добавя нов връх x и се прави съсед на върховете от 3-кликата $\{a, b, c\}$ и се добавя нов връх y и се прави съсед на върховете от 3-кликата $\{a, b, c\}$. Ще покажем, че този граф съдържа подграф, изоморфен на $K_{3,3}$. Забелязваме, че всеки от върховете a, b, c се явява съсед на всеки от върховете d, x, y:



Ако изтрием ребрата между върховете a, b, c, подграфът $K_{3,3}$ със своите девет ребра се вижда ясно:



Щом граф съдържа подграф, изоморфен на $K_{3,3}$, той не е планарен съгласно изучаваното на лекции.

e): Ще докажем, че за всяко $k \in \mathbb{N}^+$, $\min\{\chi(G) \mid G \in D_k\} = \max\{\chi(G) \mid G \in D_k\} = k + 1$. Ще докажем дори нещо по-силно: за фиксирано k, за всеки $G \in D_k$ е вярно, че $\chi(G) = k + 1$. Доказателството е със структурна индукция. В базовия случай графът е K_{k+1}, който очевидно има хроматично число $k+1$. Да допустнем, че графът G от индуктивната стъпка има хроматично число $k+1$. Нека функцията $f : V(G) \to \{1, \dots, k+1\}$ реализира върхово оцветяване на G в $k+1$ цветове. Да разгледаме множеството U. Тъй като $|U| = k$, по принципа на Дирихле съществува поне един цвят $j \in \{1, \dots, k + 1\}$, такъв че никой връх на U не е оцветен в j. Сега да разгледаме функцията $g : V(G') \to \{1, \ldots, k+1\}$, дефинирана така:

$$\forall z \in V(G') : \text{ ако } z \in V, \text{ то } g(z) = f(z), \text{ в противен случай } g(z) = j$$

Лесно се вижда, че z да не е от V е същото като $z = w$. Но g реализира върхово оцветяване на G' в $k+1$ цветове, защото

- за всяко ребро, инцидентно с w е вярно, че двата края са в различни цветове, понеже $g(w) = j$, а никой връх от U не е в цвят j;

- за останалите ребра е вярно, че двата края са в различни цветове от индуктивното допускане.

Тогава $\chi(G') \leq k+1$. Но тъй като $\chi(G) = k+1$ и G е подграф на G', вярно е, че $\chi(G') = k+1$. $\square$

Зад. 3 Докажете с комбинаторни разсъждения, че за всички $m, n, r \in \mathbb{N}^+$, такива че $r \leq \min\{m, n\}$ е вярно, че

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$$

Решение: Нека S е множество с $m + n$ елементи, m от които са червени, а останалите са зелени. Нека C е множеството

$$C = \{X \subset S \,:\, |X| = r\}$$

Съгласно изучаваното на лекции, $|C| = \binom{m+n}{r}$. За $k \in \{0, \ldots, r\}$, нека D_k е множеството

$$D_k = \{Y \in C \mid Y \text{ съдържа точно } k \text{ червени елементи}\}$$

Забелязваме, че $|D_k| = \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$, защото можем да подберем по $\binom{m}{k}$ червените в D_k от общо m червени, зелените в D_k трябва да са $r - k$ и тях можем да подберем по $\binom{n}{r-k}$ от общо n зелени, и всяка подборка на k червени може да се комбинира с всяка подборка на $r - k$ зелени.

След това забелязваме, че $\{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$ е разбиване на C, така че

$$|C| = \sum_{k=0}^{r} |D_k|$$

което можем да запишем като

$$|C| = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$$

И тъй като $|C| = \binom{m+n}{r}$, сила е

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$$

$\square$

Зад. 4 Нека $(a_1, a_2, \ldots, a_{100})$ е редица от сто числа. Известно е, че $\forall i \in \{1, \ldots, 100\} : a_i \in \{1, 2\}$. Известно е освен това, че $\forall i \in \{1, \ldots, 91\} : \sum_{j=0}^{9} a_{i+j} \leq 16$. Докажете, че съществуват p и q, такива че $1 \leq p < q \leq 100$ и $\sum_{i=p}^{q} a_i = 39$.

Решение: На прост български, дадена е редица от единици и двойки, сто на брой, така че във всяка подредица с дължина десет, сумата от елементите не надхвърля шестнадесет. От това следва, че е невъзможно, примерно, да има десет двойки една след друга, защото сумата им би била двадесет, и така нататък.

Разглеждаме сумите S_i, за $1 \leq i \leq 100$, като S_i е сумата от първите i числа. Очевидно $S_1 = a_1$, а $S_{100} = a_1 + \cdots + a_{100}$. Забелязваме, че

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_{99} < S_{100}$$

понеже елементите са положителни, така че $S_i < S_{i+1}$ за $1 \leq i \leq 99$. Ключово наблюдение е, че $S_{100} \leq 160$, понеже

$$S_{100} = \underbrace{a_1 + \cdots + a_{10}}_{\leq 16} + \underbrace{a_{11} + \cdots + a_{20}}_{\leq 16} + \cdots + \underbrace{a_{99} + \cdots + a_{100}}_{\leq 16} \leq 160$$

В условието се говори за 39: иска се да се покаже, че има подредица със сума 39. Ако добавим 39 към всяко от числата $S_1, \ldots, S_{100}$, максималното получено число ще е $S_{100} + 39$ и то не може да е по-голямо от 199, щом $S_{100} \leq 160$. И така, всяко от числата $S_1, \ldots, S_{100}, S_1 + 39, \ldots, S_{100} + 39$ е цяло, положително и не по-голямо от 199. Но тези числа са 200 на брой. По принципа на Дирихле, поне две от тях са равни.

Но числата $S_1, \ldots, S_{100}$ са две по две различни, както вече отбелязахме. Веднага следва, че $S_1 + 39, \ldots, S_{100} + 39$ са две по две различни. Щом има две еднакви числа измежду $S_1, \ldots, S_{100}, S_1 + 39, \ldots, S_{100} + 39$, трябва едно от тях да е някое S_q за някое $q \in \{1, \ldots, 100\}$, а другото да е някое $S_p + 39$ за някое $p \in \{1, \ldots, 100\}$. И така, има такива p и q, че

$$S_q = S_p + 39 \leftrightarrow S_q - S_p = 39$$

Очевидно $q > p$, защото сумите S_i нарастват строго с нарастването на i. Тогава

$$S_q = a_1 + \cdots + a_{p-1} + a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$$
$$S_p = a_1 + \cdots + a_{p-1} + a_p$$

Изваждаме второто от първото и получаваме

$$S_q - S_p = a_{p+1} + \cdots + a_q$$

Но вече знаем, че $S_q - S_p = 39$. Заключаваме, че в редицата $(a_1, \ldots, a_{100})$ има подредица със сума точно 39. Което трябваше да докажем. $\square$

Зад. 5 Напишете в явен вид всички булеви функции на три променливи $f(x, y, z)$, в които втората променлива y е фиктивна.

Решение: По определение, y е фиктивна тстк $f(x, 0, z) = f(x, 1, z)$ за стойности—а те са четири на брой—на булевия вектор xz. По-подробно казано, иска се

$$f(0,0,0) = f(0,1,0)$$
$$f(0,0,1) = f(0,1,1)$$
$$f(1,0,0) = f(1,1,0)$$
$$f(1,0,1) = f(1,1,1)$$

Очевидно има точно $2^4 = 16$ такива булеви функции и те са следните.

x	y	z	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Това са точно тези булеви вектори с дължина 8, в които на всяка двойка позиции измежду тези:

- първата и третата,
- втората и четвъртата,
- петата и седмата,
- шестата и осмата

има една и съща стойност. □