Избрани глави от комбинаториката и теорията на графите
(изпит — СУ, ФМИ, 13 юни 2023 г.)

Задача 1. Нека n, k и p са цели неотрицателни числа, като p е просто число. Да се докаже, че ако $\left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$ се дели на p^k, то $\dbinom{n}{p}$ също се дели на p^k.

Задача 2. Да се докаже, че броят на разбиванията на числото n на три събираеми е равен на броя на разбиванията на числото $2n$ на три събираеми, всяко от които е по-малко от n.

Задача 3. Нека s е цяло положително число. Разглеждаме редица от цели положителни числа, определена с равенствата $a_1 = 0$, $a_2 = 2s$, $a_3 = 3$, $a_{n+3} = s\,a_{n+1} + a_n$ за всяко цяло $n \geq 1$. Докажете, че a_p се дели на p за всяко просто число p.

Упътване: Въпреки че даденото уравнение е линейно-рекурентно, не е добре да се опитвате да го решавате чрез характеристично уравнение: то се получава кубично и има параметър s. По принцип може да бъде решено с формулата на Кардано, но това само усложнява задачата. Затова е по-добре да поемете по заобиколен път. Очевидно a_n е полином на s. Означете с $b_{n\,;\,k}$ коефициента пред s^k. За $b_{n\,;\,k}$ ще получите рекурентно уравнение и начални условия, като в началните условия ще участват числата 2 и 3 (и 0), а рекурентното уравнение ще съдържа само действието събиране. Значи, $b_{n\,;\,k}$ е линейна комбинация на двойки и тройки с някакви цели коефициенти, тоест $b_{n\,;\,k} = 2\lambda_{n\,;\,k} + 3\mu_{n\,;\,k}$. Формули за $\lambda_{n\,;\,k}$ и $\mu_{n\,;\,k}$ се получават лесно, ако се досетите за комбинаторния смисъл на тези две величини. Разликите между индексите в рекурентното уравнение за $b_{n\,;\,k}$ подсказват смисъла на λ и μ.

Задача 4. Маршрутът на автобус се състои от 14 спирки (вкл. първата и последната). Автобусът побира 25 пътници. На всяка спирка слизането предхожда качването на нови пътници. Докажете, че има такива осем спирки A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, че за никое $j \in \{1; 2; 3; 4\}$ няма пътник, който да се е качил на спирката A_j и да е слязъл на спирката B_j.

Упътване: Разделете спирките на две групи — първите седем и вторите седем спирки. Използвайте подходяща матрица 7×7 или подходящ двуделен граф със $7 + 7$ върха.

Задача 5. Колко петцифрени числа се състоят единствено от петте нечетни арабски цифри, като във всяко число разликата на съседните цифри не надхвърля 2 и всяка нечетна цифра може да се среща произволно често, включително пет пъти или нито веднъж?

Задача 6. M е крайно множество, $|M| \geq 3$, съставено от ненулеви тримерни реални вектори, никои два от които не са колинеарни. За всеки два различни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от M съществува вектор от M, който е перпендикулярен на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Докажете, че множеството M съдържа вектор, който е перпендикулярен на всички останали вектори от M.

Време за работа: три астрономически часа (сто и осемдесет минути).

Оценката $=$ 1 $+$ броя на решените задачи. Признават се само пълни решения!

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Ще използваме бройната система с основа p. В нея числото p се записва като 10. Когато делим n на p със закръгляне надолу, последната p-ична цифра на n се губи. Следователно, щом $\left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$ се дели на p^k, то записът на $\left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$ в p-ичната бройна система завършва на поне k нули, а p-ичният запис на числото n има следния вид: $abc\ldots fg\underbrace{000\ldots000}_{\text{поне } k \text{ нули}}x$, където цифрата $g > 0$.

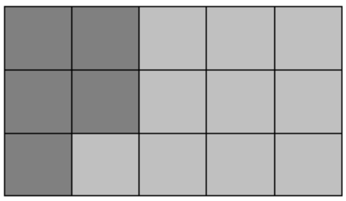
Изваждаме p от n:

$$
\begin{array}{r}
\bullet\bullet\bullet\bullet\ldots\bullet\bullet\;\; \\
- \quad abc\ldots fg000\ldots000x \\
10 \\
\hline
abc\ldots fhrrr\ldots rrrx
\end{array}
$$

(където $r = p - 1$ и $h = g - 1$). При изваждането на p от n се взима едно назаем поне k пъти; съответните разреди са отбелязани с големи точки. От теоремата на Кумер заключаваме, че $\dbinom{n}{p}$ се дели на p^k.

В разсъжденията по-горе се предполага, че $g > 0$, тоест че n е поне двуцифрено число (в p-ичната бройна система); иначе казано, дотук $n \geq p$. Ако обаче $n < p$, то $\dbinom{n}{p} = \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor = 0$ се дели на p^k за всяко цяло неотрицателно число k.

Задача 2. Между двата вида разбивания на естественото число n може да се построи биекция. Тя най-лесно се описва чрез диаграмите на Юнг. На всяка диаграма от първия вид съпоставяме нейното допълнение до правоъгълник $3 \times n$.



Картинката показва как на разбиването $5 = 2 + 2 + 1$ се съпоставя разбиването $10 = 4 + 3 + 3$. Съответствието може да се опише и формално: на разбиването $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ съпоставяме разбиването $2n = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$, където $\mu_1 = n - \lambda_3$, $\mu_2 = n - \lambda_2$ и $\mu_3 = n - \lambda_1$. Действително, $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = (n - \lambda_3) + (n - \lambda_2) + (n - \lambda_1) = (n + n + n) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 3n - n = 2n$, тоест от $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = n$ следва $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2n$. След като $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = n$ е разбиване на n на три събираеми, то n, λ_1, λ_2 и λ_3 са естествени (цели положителни) числа и $n > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Ето защо $\mu_1 = n - \lambda_3$, $\mu_2 = n - \lambda_2$ и $\mu_3 = n - \lambda_1$ са също естествени числа и $n > \mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3$. Следователно $2n = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ е разбиване на числото $2n$ на три събираеми, по-малки от n.

Съответствието е взаимноеднозначно, защото може да се обърне. Наистина, формулите $\mu_1 = n - \lambda_3$, $\mu_2 = n - \lambda_2$ и $\mu_3 = n - \lambda_1$ имат обратни: $\lambda_1 = n - \mu_3$, $\lambda_2 = n - \mu_2$ и $\lambda_3 = n - \mu_1$. Ако $2n = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ е разбиване на $2n$ на три събираеми — естествени числа, по-малки от n, то $n > \mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3$, откъдето $n > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, като λ_1, λ_2 и λ_3 са естествени числа със сбор $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = (n - \mu_1) + (n - \mu_2) + (n - \mu_3) = (n + n + n) - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) = 3n - 2n = n$, тоест $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ е разбиване на числото n.

Наличието на биекция показва, че има равен брой разбивания от двата вида.

Задача 3. Понеже a_n е полином на s, да означим с $b_{n\,;\,k}$ коефициента на този полином пред s^k:

$$a_n \;=\; \sum_{k\,\geq\,0} b_{n\,;\,k}\; s^k.$$

Рекурентното уравнение и началните условия се превеждат така:

$$b_{1\,;\,k} = 0 \;\text{ за всяко цяло }\; k \geq 0;$$

$$b_{2\,;\,0} = 0, \quad b_{2\,;\,1} = 2, \quad b_{2\,;\,k} = 0 \;\text{ за всяко цяло }\; k \geq 2;$$

$$b_{3\,;\,0} = 3, \quad b_{3\,;\,k} = 0 \;\text{ за всяко цяло }\; k \geq 1;$$

$$b_{n+3\,;\,k} = b_{n+1\,;\,k-1} + b_{n\,;\,k} \;\text{ за всяко цяло }\; n \geq 1 \;\text{ и всяко цяло }\; k \geq 1;$$

$$b_{n+3\,;\,0} = b_{n\,;\,0} \;\text{ за всяко цяло }\; n \geq 1.$$

Рекурентното уравнение съдържа само аритметичното действие събиране, следователно $b_{n\,;\,k}$ е линейна комбинация на двойката и тройката от началните условия. По-точно,

$$b_{n\,;\,k} = 2\lambda_{n\,;\,k} + 3\mu_{n\,;\,k}\,,$$

където числата $\lambda_{n\,;\,k}$ и $\mu_{n\,;\,k}$ са съответно броят на пътищата от точката $(2\,;\,1)$ до точката $(n\,;\,k)$ и броят на пътищата от точката $(3\,;\,0)$ до точката $(n\,;\,k)$. Под думата "точка" тук разбираме просто наредената двойка от индекси $(n\,;\,k)$, а структурата на пътищата се определя от индексите в рекурентното уравнение

$$b_{n+3\,;\,k} = b_{n+1\,;\,k-1} + b_{n\,;\,k}\,.$$

От него се вижда, че на всеки ход имаме две възможни стъпки:

— да увеличим първия индекс (n) с 3, като запазим втория индекс (k) непроменен;

— да увеличим първия индекс (n) с 2, а втория индекс (k) — с 1.

И двете стъпки увеличават сбора на индексите с 3. Тъй като коефициентите $b_{2\,;\,1} = 2$ и $b_{3\,;\,0} = 3$ имат сборове от индекси $2+1=3$ и $3+0=3$, то необходимо условие за съществуването на път е $n+k$ да се дели на 3. Ако $n+k$ не се дели на 3, то $\lambda_{n\,;\,k} = \mu_{n\,;\,k} = 0$, откъдето $b_{n\,;\,k} = 0$.

Да пресметнем броя на пътищата от точката $(n_0\,;\,k_0)$ до точката $(n\,;\,k)$, при условие че $(n+k)-(n_0+k_0)$ се дели на 3. Такъв път съдържа общо $\dfrac{(n+k)-(n_0+k_0)}{3}$ стъпки; от тях $k-k_0$ стъпки са от втория вид, а останалите са от първия вид. Пътищата се различават само по позициите на стъпките от втория вид в редицата от ходове, затова пътищата представляват комбинации без повторение на $\dfrac{(n+k)-(n_0+k_0)}{3}$ елемента, от клас $k-k_0$. Оттук следва, че броят на пътищата е равен на $\dbinom{\frac{(n+k)-(n_0+k_0)}{3}}{k-k_0}$. Заместваме $(n_0\,;\,k_0)$ с $(2\,;1)$ и с $(3\,;0)$:

$$\lambda_{n\,;\,k} = \binom{\dfrac{n+k}{3}-1}{k-1}, \quad \mu_{n\,;\,k} = \binom{\dfrac{n+k}{3}-1}{k};$$

$$b_{n\,;\,k} = 2\binom{\dfrac{n+k}{3}-1}{k-1} + 3\binom{\dfrac{n+k}{3}-1}{k}, \;\text{ когато }\; n+k \;\text{ се дели на 3.}$$

Сега нека $n=p$ е просто число. Ако $p+k$ не се дели на 3, то $b_{p\,;\,k}=0$ се дели на p. Затова нека $p+k$ се дели на 3, тоест $p+k=3m$ за някое цяло положително m. Заместваме $k=3m-p$:

$$b_{p\,;\,k} = 2\binom{m-1}{3m-p-1} + 3\binom{m-1}{3m-p} \;=\; \frac{(m-1)!}{(3m-p)!(p-2m)!}\,p, \;\text{ ако }\; 2m \leq p \leq 3m, \;\text{ т.е. }\; \frac{p}{3} \leq m \leq \frac{p}{2}$$

(иначе $b_{p\,;\,k}$ трябва да се смята за нула, а нулата се дели на p).

Да допуснем, че множителят пред p в последното равенство представлява дробно число. От двойното неравенство следва, че знаменателят на дробта не съдържа числа, кратни на p. Затова множителят p няма какво да съкрати в знаменателя, поради което произведението на p със споменатия множител (тоест $b_{p\,;\,k}$) е също дробно число. Това обаче не е възможно: $b_{p\,;\,k}$ е линейна комбинация на биномни коефициенти с цели множители и затова е цяло число.

Това противоречие показва, че множителят пред p е цяло число, значи $b_{p\,;\,k}$ се дели на p. И числото s е цяло, затова сборът $a_p = \sum\limits_{k \geq 0} b_{p\,;\,k}\, s^k$ се дели на p, което трябваше да се докаже.

Тази задача е от международното студентско състезание по математика "Ал-Хорезми", проведено в Узбекистан през 2018 г.

Задача 4. Между седмата и осмата спирка в автобуса пътуват не повече от 25 пътници. Те са се качили на първите седем спирки и ще слязат на последните седем спирки. Образуваме двоична матрица M от тип 7×7, отразяваща тази информация: $M(i, j) = 0$, ако някой пътник се е качил на i-тата от първите седем спирки и ще слезе на j-тата от последните седем спирки; иначе $M(i, j) = 1$. Матрицата M има 49 клетки и най-много 25 от тях са нули, следователно поне 24 клетки съдържат единици. Тълкуваме стълбовете на M като характеристични вектори, тоест като множества от редове на M (онези редове, в които стълбът съдържа единици).

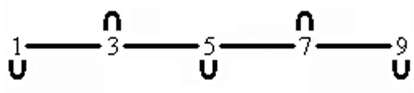
Да допуснем, че има k стълба, $4 \leq k \leq 7$, чието обединение като множество съдържа не повече от $k - 4$ елемента. Тези k стълба имат общо не повече от $k(k-4) = k^2 - 4k$ единици (всички те се намират в споменатите $k - 4$ реда), а останалите $7 - k$ стълба съдържат общо не повече от $7(7-k) = 49 - 7k$ единици. Така всички единици в матрицата M са не повече от $(k^2 - 4k) + (49 - 7k) = k^2 - 11k + 49$; от друга страна, те са поне 24. Ето защо $k^2 - 11k + 49 \geq 24$, тоест $k^2 - 11k + 25 \geq 0$. Това неравенство няма решение $k \in \{4; 5; 6; 7\}$. Полученото противоречие показва, че допускането не е вярно. Вярно е противното: които и k стълба на M да вземем, обединението им като множество съдържа поне $k - 3$ елемента. (Всъщност това беше доказано само за $4 \leq k \leq 7$, но за $k \leq 3$ твърдението е тривиално, а $k > 7$ е невъзможно.)

Формулировка чрез граф: Разглеждаме двуделен граф със $7 + 7$ върха — двете множества от по седем спирки. Има ребро от спирка i към спирка j, ако и само ако няма пътник, който да се е качил от спирка i и да пътува за спирка j. Матрицата на съседствата на този граф съвпада с M, а полученият извод може да се формулира така: които и k върха да вземем от единия дял на графа, излизащите от тях ребра имат в другия дял общо поне $k - 3$ върха.

От обобщената теорема на Хол следва, че графът съдържа съчетание от поне четири ребра. Тоест в матрицата M има поне четири единици, всеки две от които лежат в различни редове и в различни стълбове. Тези ребра (единици) задават четирите двойки от спирки $(A_j\,,\,B_j)$.

Задача 4 е от XIV Московска олимпиада по математика, проведена през 1951 г.

Задача 5. Числата от условието съответстват еднозначно на пътища (не непременно прости) с четири ребра в изобразения неориентиран граф с примки.



Този граф има следната матрица на съседствата:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пресмятаме M^4 чрез бързо степенуване (двукратно повдигане на квадрат):

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad M^4 = \left(M^2\right)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 9 & 4 & 1 \\ 12 & 18 & 16 & 10 & 4 \\ 9 & 16 & 19 & 16 & 9 \\ 4 & 10 & 16 & 18 & 12 \\ 1 & 4 & 9 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Елементите на матрицата M^4 показват броя на пътищата с дължина 4 между двойките върхове, затова сборът 259 на тези числа е броят на всички пътища с дължина 4 в показания граф. Толкова са и петцифрените числа със свойствата от условието на задачата.

Задача 6. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са два различни вектора от M. По условие съществува вектор $\vec{c} \in M$, който е перпендикулярен на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тъй като $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ненулеви и неколинеарни, то те определят направление на равнина и $\vec{c}$ е перпендикулярен на това направление. Ето защо за вектора $\vec{c}$ има само едно възможно направление. Ако се допусне, че съществува още един вектор $\vec{d} \in M$, който е перпендикулярен на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то векторът $\vec{d}$ ще има същото направление като вектора $\vec{c}$, тоест $\vec{c}$ и $\vec{d}$ ще бъдат колинеарни, което е невъзможно. Затова $\vec{c}$ е единственият вектор от M, перпендикулярен на $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Разглеждаме неориентиран граф, чиито върхове са векторите от M, а ребрата му свързват перпендикулярните вектори. Според доказаното в предишния абзац всеки два върха притежават единствен общ съсед. От теоремата за дружбата следва, че в графа има връх ("политик"), свързан чрез ребро с всички други върхове. Тоест в M има вектор, който е перпендикулярен на всички други вектори от M.