Примерни решения на задачите от поправителния изпит-задачи по Дискр. Стр-ри

Зад. 1 Даден е сандък с форма на правоъгълен паралелепипед и с вътрешни размери 20 см на 20 см на $10n$ сантиметра, където n е цяло положително число. Дадени са и неограничено много тухли, всяка с размери 20 см на 20 см на 10 см. По колко различни начина, като функция на n, може да бъде напълнен сандъкът плътно с тухли? Иска се да няма никакви празнини между тухлите или около тухлите в сандъка. Не е разрешено да се чупят тухли!

Решение: Ще съставим рекурентно уравнение и ще го решим. Нека S_n е броят на начините да напълним плътно сандъка с тухли. Ако $n = 1$, има място за точно една тухла, така че $S_1 = 1$. Ако $n = 2$, има място за точно две тухли, които са с долепени големи страни и заедно представляват паралелепипедно блокче с размери $20 \times 20 \times 20$. Това блокче може да бъде сложено по три различни начина, така че $S_2 = 3$. Ако $n \geq 3$, нека си представим запълването на сандъка като процес, който запълва сандъка надлъжно, започвайки от единия край.

- Можем да сложим една тухла така, че голямата ѝ страна да е плътно опряна до единия край на сандъка. Това означава, че остава за запълване сандък с дължина $10(n-1)$ см.
- Можем да сложим една тухла легнала, като една от малките ѝ страни е плътно опряна до единия край на сандъка. Тогава сме длъжни да сложим друга тухла точно върху нея, инак би се получила кухина, която няма как да запълним, без да чупим тухли. След слагането на втората тухла, остава за запълване сандък с дължина $10(n-2)$ см.
- Можем да сложим една тухла изправена, като една от малките ѝ страни е плътно опряна до единия край на сандъка, а една от големите ѝ страни е плътно опряна до гърба на сандъка. Тогава сме длъжни да сложим друга тухла точно до нея, инак би се получила кухина, която няма как да запълним, без да чупим тухли. След слагането на втората тухла, остава за запълване сандък с дължина $10(n-2)$ см.

Друг начин да започнем няма, а изброените начини са два по два несъвместими. Съгласно принципа на разбиването, $S_n = S_{n-1} + 2S_{n-2}$ при $n \geq 3$.

В обобщение,

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 1 \\ 3, & \text{ако } n = 2 \\ S_{n-1} + 2S_{n-2}, & \text{ако } n \geq 3 \end{cases}$$

Това рекурентно уравнение подлежи на решаване с метода с характеристичното уравнение. Решението е

$$S_n = \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-1)^n}{3}$$

Зад. 2 Какъв е коефициентът пред $a^6b^8c^6d^6$ в $(4a^3 - 5b + 9c^2 + 7d)^{19}$?

Решение: Съгласно изучаваното на лекции, за реални променливи x_1, x_2, x_3 и x_4 е вярно, че

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=n} \binom{n}{k_1, k_2, k_3, k_4} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} x_4^{k_4}$$

където $\binom{n}{k_1,k_2,k_3,k_4}$ е мултиномен коефициент, като $\binom{n}{k_1,k_2,k_3,k_4} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}$. В частност, за $x_1 = 4a^3$, $x_2 = (-5b)$, $x_3 = 9c^2$ и $x_4 = 7d$ и $n = 19$ е изпълнено

$$(4a^3 + (-5b) + 9c^2 + 7d)^{19} = \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=19} \binom{19}{k_1, k_2, k_3, k_4} (4a^3)^{k_1}(-5b)^{k_2}(9c^2)^{k_3}(7d)^{k_4} \tag{1}$$

което е същото като

$$(4a^3 + (-5b) + 9c^2 + 7d)^{19} = \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=19} \binom{19}{k_1, k_2, k_3, k_4} (4)^{k_1}(a^3)^{k_1}(-5)^{k_2}(b)^{k_2}(9)^{k_3}(c^2)^{k_3}(7)^{k_4}(d)^{k_4} \tag{2}$$

Търсим коефициентът пред $a^6b^8c^6d^6$. Да препишем този израз така: $(a^3)^2b^8(c^2)^3d^6$. Това прави по-лесни следващите разсъждения, понеже в сумата вдясно в (2), a участва с третата си степен, а c участва с втората си степен.

Наистина, в $(a^3)^2b^8(c^2)^3d^6$, сумата от степенните показатели е $2 + 8 + 3 + 6 = 19$, така че при отварянето на скобите на $(4a^3 - 5b + 9c^2 + 7d)^{19}$ ще се получат такива събираеми. След опростяването на сбора, коефициентът пред $(a^3)^2b^8(c^2)^3d^6$ се оказва

$$\binom{19}{k_1, k_2, k_3, k_4} (4)^{k_1}(-5)^{k_2}(9)^{k_3}(7)^{k_4}$$

където $k_1 = 2$, $k_2 = 8$, $k_3 = 3$ и $k_4 = 6$.

Отговорът е

$$\binom{19}{2, 8, 3, 6} (4)^2(-5)^8(9)^3(7)^6 = \frac{19!(4)^2(-5)^8(9)^3(7)^6}{2!8!3!6!}$$

Численият отговор, който не се иска, е 187 178 576 895 560 250 000 000.

Зад. 3 Нека k е цяло положително число, като $k \geq 2$. Докажете, че никой двуделен k-регулярен граф няма мост.

Решение: Да допуснем противното. Нека $G = (V, E)$ е двуделен k-регулярен граф за някое $k \geq 2$, който има мост $e \in E$. БОО, допускаме, че G е свързан, понеже в противен случай доказателството се прави върху свързаната компонента, съдържаща моста e. Нека $e = (u, v)$.

Нека дяловете на G са U и W. Нека $G' = G - e$. Щом G е свързан и e е мост, G' има точно две свързани компоненти. Да ги наречем H и J. Очевидно $V(H) \cup V(J) = V$. Забелязваме, че и H, и J са двуделни графи, като двата дяла на H са $V(H) \cap U$ и $V(H) \cap W$, а двата дяла на J са $V(J) \cap U$ и $V(J) \cap W$. Сега разглеждаме само H.

Нека краят на e, който е връх от H, бъде връх v. БОО, нека $v \in W$. Тогава всеки връх от $V(H) \cap U$ има същата степен в H, каквато има в G, но точно един връх от $V(H) \cap W$, а именно връх v, има степен $k - 1$ в H (защото H се получава след изтриването на реброто (u, v)). Всички останали върхове от $V(H) \cap W$ имат същата степен в H, каквато имат в G.

Нека $|V(H) \cap U| = n_1$ и $|V(H) \cap W| = n_2$. Да преброим ребрата на H. От една страна, $|E(H)| = n_1 k$, понеже,

1. единият край на всяко ребро на H се намира в U и
2. всеки връх от $V(H) \cap U$ има степен k в H.

От друга страна, $|E(H)| = n_2 k - 1$, понеже,

1. единият край на всяко ребро на H се намира в W и
2. всеки връх от $V(H) \cap W$ с изключение на един има степен k в H, а изключението има степен $k - 1$ в H.

Тогава $n_1 k = n_2 k - 1$. Но това е невъзможно, понеже лявата страна е кратна на k, а дясната не е.

Аргументът не работи при $k = 1$, но в условието е казано, че $k \geq 2$.

Зад. 4 Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е булева функция. Казваме, че тази функция е *симетрична*, ако

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)})$$

за всяка биекция $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Колко симетрични булеви функции на n променливи има?

Решение: На прост български, функция е симетрична, ако запазва стойността си при всяка пермутация на променливите си. Забелязваме, че необходимо и достатъчно условие за това, функция да е симетрична, е да има една и съща стойност върху всички вектори с еднакъв брой единици. Броят на единиците може да е най-малко 0 и най-много n, откъдето има точно $n + 1$ възможности за броя на единиците във вход на функцията. Тъй като за различни бройки единици във входа функцията може да взема стойности независимо, броят на симетричните функции е 2^{n+1}.