1.3 Аксиоми на съждителното смятане. Правила за извод.

В предния параграф дефинирахме езика на съждителното смятане. За да завършим дефиницията на формалната система на съждителното смятане остава да кажем, кои от формулите ще наричаме аксиоми на съждителното смятане и какви са правилата за извод. Аксиомите на съждителното смятане се определят чрез следната схема:

$$\text{За всяка съждителна формула } \mathbf{A}, \text{ формулата } \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \text{ е аксиома.} \tag{A}$$

Аксиомите са твърдения, които приемаме за верни и не подлежат на доказатлество. В случая ние приемаме, че всяко твърдение или е вярно, или е вярно, че не е вярно, т.е. или е вярно самото твърдения, или е вярно неговото отрицание. Тази аксиома се нарича аксиома (или още принцип) за изключеното трето и стои в основата на почти всички математически разглеждания. Изключение прави само интуиционистката логика, където отрицанието се разглежда по един малко по-особен начин.

Остава само да фиксираме правилата, с помощта на които ще получаваме теоремите, изхождайки от аксиомите. Ще се спрем на следния списък от четири правила. Всяко правило ще се състои от два списъка от формули разделени с черта. Списъкът над чертата ще съдържа една или две формули, а този под чертата една формула. Така записано, правилото ни дава право да изведем формулата, стояща под чертата, от списъка от формули, намиращ се над чертата. Правилата са подбрани така, че ако формулите над чертата са верни, то задължително тази под чертата също да бъде вярна.

(ПР) $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{B} \vee \mathbf{A}}$ (Правило за разширяването)

(ПСв) $\dfrac{\mathbf{A} \vee \mathbf{A}}{\mathbf{A}}$ (Правило за свиването)

(ПА) $\dfrac{\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})}{(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}}$ (Правило за асоциативност)

(ПО) $\dfrac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B},\ \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}}{\mathbf{B} \vee \mathbf{C}}$ (Правило за съкращението)

Всако едно от правилата е валидно за всеки избор на формули $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. Така дефинирани, тези четири правила са правила за текстообработка, т.е. правила за получаване на нови думи от думи, които вече сме получили. Интуицията, стояща зад тези правила е следната. Да разледаме първо *правилото за разширението.* То казва, че за всеки избор на формула $\mathbf{B}$ можем да получим формулата $\mathbf{B} \vee \mathbf{A}$ от формулата $\mathbf{A}$. Смисълът на това правило е, че в случай, че $\mathbf{A}$ е вярно твърдение, то необходимо е вярно и твърдението $\mathbf{B} \vee \mathbf{A}$, каквото и да е твърдението $\mathbf{B}$. Това действитлено е така, тъй като формулата $\mathbf{B} \vee \mathbf{A}$ казва, че е вярно поне едно от твърденията $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Правилото за свиването ни дава право да получим формулата $\mathbf{A}$ от формулата $\mathbf{A} \vee \mathbf{A}$. С други думи, то казва, че ако е вярна формулата $\mathbf{A} \vee \mathbf{A}$ то непременно е вярна и формулата $\mathbf{A}$. Това действително е така, тъй като ако знаем, че е вярна поне една от формулите $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}$, то тогава със сигурност можем да твърдим, че е вярна формулата $\mathbf{A}$.

Правилото за асоциативността ни дава право да получим формулата $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$ от формулата $\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$, или казано малко по-неточно, то ни позвалява да местим скобите наляво. Това правило казва, че ако формулата $\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$ е вярна, то със сигурност е вярна и формулата $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$. Това наистина е така, тъй като в случай, че е вярна формулата $\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$, то е вярна поне една от двете формулите $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ и значи е вярна поне една от трите формули $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. От друга страна, ако е вярна поне една от трите формули $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ то е вярна поне една от двете формули $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, и значи е вярна и формулата $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$.

Накрая, *правилото за съкращението* ни дава право да получим формулата $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ от формулите $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ и $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$. Както по-горе, смисълът на това правило е, че ако формулите $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ и $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$ са верни, то със сигурност е вярна и формулата $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$. Това е действително така, тъй като, ако формулите $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ и $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$ са верни, то е вярна поне една от формулите $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, и поне една от формулите $\neg\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$. От друга страна не е възможно формулите $\mathbf{A}$ и $\neg\mathbf{A}$ да бъдат едновремено верни и значи е вярна поне една от формулите $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, т.е. формулата $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ е вярна.

Така представената интуиция за това, как правилата запазват верността на формулите ще бъде формализирана в следващия параграф. Със задаването на правилата дефинирането на формалната система на съждителното смятане е завършена и вече можем да говорим за теоремите на тази формална система. Да напомним, че ако $\mathbf{A}$ е теорема на съждителното смятане, ще пишем $\vdash_{PC} \mathbf{A}$ или за по-кратко $\vdash \mathbf{A}$ в рамките на тази глава.

1.4 Породени правила на съждителното смятане

В следващите няколко твърдения ще изведем по-общи правила за извод на теореми във формалната система на съждителното смятане.

$$(\text{ПК}) \qquad \dfrac{\mathbf{A}\lor\mathbf{B}}{\mathbf{B}\lor\mathbf{A}} \qquad (\text{Правило за комутативност})$$

Наистина,

$$\dfrac{\mathbf{A}\lor\mathbf{B} \qquad \dfrac{}{\neg\mathbf{A}\lor\mathbf{A}}\,(\text{Акс})}{\mathbf{B}\lor\mathbf{A}}\,(\text{ПС})$$

$$(\text{ПР}') \qquad \dfrac{\mathbf{A}_i}{\mathbf{A}_1\lor\mathbf{A}_2\lor\ldots\lor\mathbf{A}_n}, \quad \text{за } 1\leqslant i\leqslant n$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{A}_i}{(\mathbf{A}_{i+1}\lor\cdots\lor\mathbf{A}_n)\lor\mathbf{A}_i}\,(\text{ПР})}{\mathbf{A}_i\lor\cdots\lor\mathbf{A}_n}\,(\text{ПК})}{\mathbf{A}_{i-1}\lor\cdots\lor\mathbf{A}_n}\,(\text{ПР})}{\vdots}\,(\text{ПР})}{\mathbf{A}_1\lor\mathbf{A}_2\lor\cdots\lor\mathbf{A}_n}\,(\text{ПР})$$

$$(\text{ПР}'') \qquad \dfrac{\mathbf{A}_i\lor\mathbf{A}_j}{\mathbf{A}_1\lor\mathbf{A}_2\lor\ldots\lor\mathbf{A}_n}, \quad \text{за } 1\leqslant i,j\leqslant n$$

Съгласно (ПК) можем да считаме, че $i\leqslant j$. Ще разгледаме два случая. Нека първо $i=j$. Тогава

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{A}_i\lor\mathbf{A}_i}{\mathbf{A}_i}\,(\text{ПСв})}{\mathbf{A}_1\lor\mathbf{A}_2\lor\cdots\lor\mathbf{A}_n}\,(\text{ПР}')$$

Нека сега $i<j$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{A}_i\lor\mathbf{A}_j}{\mathbf{A}_n\lor(\mathbf{A}_i\lor\mathbf{A}_j)}\,(\text{ПР})}{\mathbf{A}_{n-1}\lor(\mathbf{A}_n\lor(\mathbf{A}_i\lor\mathbf{A}_j))}\,(\text{ПР})}{(\mathbf{A}_{n-1}\lor\mathbf{A}_n)\lor(\mathbf{A}_i\lor\mathbf{A}_j)}\,(\text{ПА})}{\vdots}}{(\mathbf{A}_{j+1}\lor\ldots\lor\mathbf{A}_n)\lor(\mathbf{A}_i\lor\mathbf{A}_j)}}{((\mathbf{A}_{j+1}\lor\ldots\lor\mathbf{A}_n)\lor\mathbf{A}_i)\lor\mathbf{A}_j}\,(\text{ПА})}{\mathbf{A}_j\lor(\mathbf{A}_{j+1}\lor\ldots\lor\mathbf{A}_n)\lor\mathbf{A}_i}\,(\text{ПК})}{(\mathbf{A}_j\lor\ldots\lor\mathbf{A}_n)\lor\mathbf{A}_i}\,(\text{ПА})}{\mathbf{A}_{j-1}\lor((\mathbf{A}_j\lor\ldots\lor\mathbf{A}_n)\lor\mathbf{A}_i)}\,(\text{ПР})}{(\mathbf{A}_{j-1}\lor\ldots\lor\mathbf{A}_n)\lor\mathbf{A}_i}\,(\text{ПА})}{\vdots}}{(\mathbf{A}_{i+1}\lor\ldots\lor\mathbf{A}_n)\lor\mathbf{A}_i}}{\mathbf{A}_i\lor\cdots\lor\mathbf{A}_n}\,(\text{ПК})}{\mathbf{A}_1\lor\mathbf{A}_2\lor\cdots\lor\mathbf{A}_n}\,(\text{ПР}')$$

$$(\text{ПП}) \qquad \dfrac{\mathbf{A}_{i_1}\lor\mathbf{A}_{i_2}\lor\ldots\lor\mathbf{A}_{i_k}}{\mathbf{A}_1\lor\mathbf{A}_2\lor\ldots\lor\mathbf{A}_n}, \quad \text{при} \quad 1\leqslant i_1,i_2,\ldots,i_k\leqslant n$$

Доказателство. Да означим формулата $\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ с $\mathbf{A}$. Ще докажем твърдението с индукция по $k \geqslant 1$. При $k \leqslant 2$ твърдението е в същност (ПР$'$) и (ПР$''$). Нека сега $k \geqslant 3$ и да означим формулата $\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ с $\mathbf{A}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{A}_{i_1} \vee \mathbf{A}_{i_2} \vee \mathbf{A}_{i_3} \vee \ldots \vee \mathbf{A}_{i_k}}{(\mathbf{A}_{i_1} \vee \mathbf{A}_{i_2}) \vee \mathbf{A}_{i_3} \vee \ldots \vee \mathbf{A}_{i_k}}\text{(ПА)}}{(\mathbf{A}_{i_1} \vee \mathbf{A}_{i_2}) \vee \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n}\text{(Инд. предп.)}}{\mathbf{A} \vee (\mathbf{A}_{i_1} \vee \mathbf{A}_{i_2})}\text{(ПК)}}{(\mathbf{A} \vee \mathbf{A}_{i_1}) \vee \mathbf{A}_{i_2}}\text{(ПА)}}{(\mathbf{A} \vee \mathbf{A}_{i_1}) \vee \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n}\text{(ПР}''\text{)}}{\mathbf{A} \vee (\mathbf{A} \vee \mathbf{A}_{i_1})}\text{(ПК)}}{(\mathbf{A} \vee \mathbf{A}) \vee \mathbf{A}_{i_1}}\text{(ПА)}}{(\mathbf{A} \vee \mathbf{A}) \vee \mathbf{A}}\text{(ПР}''\text{)}}{(\mathbf{A} \vee \mathbf{A}) \vee \mathbf{A} \vee \mathbf{A}}\text{(ПР}''\text{)}}{\mathbf{A} \vee \mathbf{A}}\text{(ПСв)}}{\mathbf{A}}\text{(ПСв)}$$

$\square$

(ПДО) $\dfrac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}}{\neg\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}}$ (Правило за въвеждане на двойно отрицания)

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}} \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}}\text{(Акс.)}}{\neg\mathbf{A} \vee \neg\neg\mathbf{A}}\text{(ПК)}}{\mathbf{B} \vee \neg\neg\mathbf{A}}\text{(ПС)}}{\neg\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}}\text{(ПК)}$$

$\square$

(ПДП) $\dfrac{\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C} \quad \neg\mathbf{B} \vee \mathbf{C}}{\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}}$ (Правило за дизюнкция в предпоставката)

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{A} \vee \mathbf{B}}\text{(Акс.)}}{\mathbf{A} \vee \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{B}}\text{(ПП)} \quad \dfrac{}{\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}}}{(\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}}\text{(ПС)}}{\mathbf{C} \vee \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{B}}\text{(ПК)}}{\mathbf{B} \vee \mathbf{C} \vee \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})}\text{(ПП)} \quad \dfrac{}{\neg\mathbf{B} \vee \mathbf{C}}}{(\mathbf{C} \vee \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})) \vee \mathbf{C}}\text{(ПС)}}{\mathbf{C} \vee \mathbf{C} \vee \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})}\text{(ПК)}}{\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}}\text{(ПП)}$$

$\square$

(MP) $\dfrac{\mathbf{A} \quad \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$ (Modus Ponens)

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}}\text{(ПП)} \quad \dfrac{}{\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}}}{\mathbf{B} \vee \mathbf{B}}\text{(ПС)}}{\mathbf{B}}\text{(ПСв)}$$

$\square$