Глава 1

Съждително смятане

1.1 Азбуки и думи

Под *азбука* стандартно се разбира непразно, крайно множество от символи. Освен кирилицата, латиницита и гръцката азбука, като познат пример за азбука можем да посочим и цифрите 0, 1, ..., 9, използвани за записване на естествените, целите и рационалните числа. В нашите разглеждания няма да налагаме никакви ограничения върху символите, които можем да използваме. Така, за нас, *всяко множество*, независимо дали крайно или безкрайно, може да бъде разглеждано като азбука. Нещо повече — в нашите разглеждания ще използваме предимно безкрайни азбуки. В по-голямата си част азбуките, които ще използваме, ще се състоят от краен брой символи и безкраен списък, състоящ се от една или повече букви (от латинската или гръцката азбука) индексирани по елементите на дадени множества. Например, някои от конкретните азбуки, които ще разглеждаме са

$$\neg, \vee, P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

$$\neg, \vee, =, \exists, 0, S, +, \times, <, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$$

и

$$\neg, \vee, =, \exists, 0, 1, +, \times, \xi_n \text{ за } n \in \mathbb{N}, \mathbf{i}_r \text{ за } r \in \mathbb{R}.$$

Под *дума* над азбука Σ ще разбираме всяка крайна редица от елементи (символи) на Σ. Така например всяка дума от българския език е дума над кирилицата, всяка дума от английския език е дума над латиницата, а всеки десетичен запис на естествено число е дума над азбуката 0, 1, ..., 9. При дадени две думи w_1 и w_2 над една азбука, под тяхна *конкатенация* w_1w_2 ще разбираме думата, която се образува, залепяйки думата w_2 отдясно на думата w_1. По-точно, ако w_1 е думата $a_1a_2\ldots a_k$, а w_2 е думата $b_1b_2\ldots b_s$, където $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s$ са символи от азбуката, то w_1w_2 е думата $a_1a_2\ldots a_kb_1b_2\ldots b_s$. Ще отбележим, че операцията конкатенацията не е комутативна. Така например конкатенацията на думите 10200 и 3245 е думата 102003245, докато конкатенацията на думите 3245 и 10200 е 324510200.

Накрая ще казваме, че думата w_1 е префикс на думата w, ако съществува дума w_2, такава, че думата w съвпада с конкатенацията w_1w_2.

1.2 Език на съждителното смятане

Езикът на съждителното смятане се състои от три основни компоненти: *съждителни променливи*, *логически символи (връзки)* и *съждителни формули*. Съждитлените променливи са произволен безкраен списък от символи. В рамките на тази глава съждителните променливи са

$$P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$$

Логическите символи са $\neg$ и $\vee$, като символът $\neg$ се нарича *отрицание* и се чете „не е вярно, че“, а символът $\vee$ се нарича дизюнкция и се чете „или“ или още „вярно е поне едно от двете твърдения“. Съждителните формули са специални думи над азбуката

$$\neg, \vee, P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

Те се дефинират с помощта на следната индукция:

(i) Всяка съждителна променлива е формула;

(ii) Ако $\mathbf{A}$ е съждителна формула, то $\neg\mathbf{A}$ е съждитлена формула;

(iii) Ако $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ са съждителни формули, то $\vee\mathbf{AB}$ е съждитлена формула.

Така например $\vee P_1 \neg \vee \neg P_1 \neg P_1$ и $\vee P_0 P_{15}$ са формули, а $\neg \vee \vee$ и $P_0 \neg P_1$ не са. Нека отбележим, че съгласно дефеницията, ако думата $\mathbf{C}$ е съждителна формула, то е вярно точно едно от следните твърдения

(i) $\mathbf{C}$ е съждителна променлива;

(ii) $\mathbf{C}$ започва със символа $\neg$ и съществува формула $\mathbf{A}$, такава че $\mathbf{C}$ е $\neg\mathbf{A}$.

(iii) $\mathbf{C}$ започва със символа $\vee$ и съществуват формули $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, такива че $\mathbf{C}$ е $\vee\mathbf{AB}$.

Въпреки, че използваният *префиксен* запис изглежда необичаен, той има известно предимство пред по-разпространения *инфиксен* запис. По-конкретно този запис допуска еднозначен прочит на формулите без необходимост от употребата на скоби, както показват следващите две твърдения.

Лема 1.1. Нека $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ са формули. В случай че $\mathbf{C}$ е префикс на $\mathbf{C}'$, то $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ съвпадат.

Доказателство. Нека първо да отбележим, че $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ съдържат поне един символ. Ще докажем твърдението с индукция по броя на символите в $\mathbf{C}'$.

(i) $\mathbf{C}'$ е съждителна променлива. Тогава $\mathbf{C}'$ съдържа точно един символ и тъй като $\mathbf{C}$ съдържа поне един символ, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ съвпадат.

(ii) $\mathbf{C}'$ е $\neg\mathbf{A}'$ за някоя формула $\mathbf{A}'$. Тогава, тъй като $\mathbf{C}$ е префикс на $\mathbf{C}'$, $\mathbf{C}$ е формула от вида $\neg\mathbf{A}$ за някоя формула $\mathbf{A}$, като при това задължително $\mathbf{A}$ е префикс на $\mathbf{A}'$. Но $\mathbf{A}'$ е по-къса дума от $\mathbf{C}'$ и следователно съласно индукционното предположение $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ съвпадат. Следователно $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ също съвпадат.

(iii) $\mathbf{C}'$ е $\vee\mathbf{A}'\mathbf{B}'$ за някои формули $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{B}'$. Тогава, тъй като $\mathbf{C}$ е префикс на $\mathbf{C}'$, $\mathbf{C}$ е формула от вида $\vee\mathbf{AB}$ за някои формули $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Тъй като $\mathbf{C}$ е префикс на $\mathbf{C}'$, то обезателно $\mathbf{A}$ е прификс на $\mathbf{A}'$ или $\mathbf{A}'$ е префикс на $\mathbf{A}$. Но както $\mathbf{A}$, така и $\mathbf{A}'$ са по-къси думи от $\mathbf{C}'$ и значи $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ съвпадат съгласно индукционното предположение. Така $\mathbf{C}$ е $\vee\mathbf{AB}$, а $\mathbf{C}'$ е $\vee\mathbf{AB}'$. Възползвайки се отново от това, че $\mathbf{C}$ е префикс на $\mathbf{C}'$, получаваме, че $\mathbf{B}$ е префикс на $\mathbf{B}'$. Но $\mathbf{B}'$ е по-къса от $\mathbf{C}'$ и следователно $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}'$, а значи и $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$, съвпадат.

$\square$

Теорема 1.2 (Теорема за еднозначния прочит)**.** Нека $\mathbf{C}$ е съждителна формула. Тогава е вярно точно едно от следните твърдения:

(i) Съществува *единствена* съждителна променлива P_n, такава че $\mathbf{C}$ е P_n;

(ii) $\mathbf{C}$ започва със символа $\neg$ и съществува *единствена* формула $\mathbf{A}$, такава че $\mathbf{C}$ е $\neg\mathbf{A}$.

(iii) $\mathbf{C}$ започва със символа $\vee$ и съществуват *единствени* формули $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, такива че $\mathbf{C}$ е $\vee\mathbf{AB}$.

Доказателство. Трябва да докажем единствено твърденията за единственост.

(i) $\mathbf{C}$ е съждителна променлива. В този случай твърдението е очевидно.

(ii) $\mathbf{C}$ е $\neg\mathbf{A}$. В този случай, твърдението е отново очевидно.

(iii) $\mathbf{C}$ е $\vee\mathbf{AB}$ и $\vee\mathbf{A}'\mathbf{B}'$ за някои формули $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{B}'$. Тогава $\mathbf{A}$ е префикс на $\mathbf{A}'$ или $\mathbf{A}'$ е префикс на $\mathbf{A}$. И в двата случая двете формули съвпадат съгласно Лема 1.1. Така формулите $\vee\mathbf{AB}$ и $\vee\mathbf{AB}'$ и следователно формулите $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}'$ също съвпадат.

$\square$

Твърдение 1.3. Нека $\mathbf{C}$ е формула. Тогава всеки символ на $\mathbf{C}$ е начало на единствена подформула на $\mathbf{C}$.

Доказателство. Единствеността следва директно от Лема 1.1. За съществуването нека първо да отбележим, че ако изберем първия символ на $\mathbf{C}$, то търсената подформула е самата $\mathbf{C}$. За общия случай ще проведем индукция по построението на $\mathbf{C}$.

(i) Ако $\mathbf{C}$ е съждителна променлива, твърдението е очевидно.

(ii) Ако $\mathbf{C}$ е $\neg\mathbf{A}$ или $\vee\mathbf{AB}$ и изберем символ, различен от първия, то този символ попада в $\mathbf{A}$ (или в $\mathbf{B}$) и съгласно индукционното предположение такава подформула съществува.

$\square$

Теорема 1.4. Нека $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ са подформули на формулата $\mathbf{C}$ (т.е. $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ са формули и поддуми на $\mathbf{C}$). Тогава или $\mathbf{A}$ е подформула на $\mathbf{B}$, или $\mathbf{B}$ е подформула на $\mathbf{A}$, или $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ нямат обща част.

Доказателство. Нека $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имат обща част, като за определеност предположим, че суфикс на $\mathbf{A}$ е префикс на $\mathbf{B}$. Съгласно предното твърдение първият символ на общата част е начало на подформула на $\mathbf{A}$. Но тази подформула на $\mathbf{A}$ е префикс на $\mathbf{B}$ и следователно съгласно Лема 1.1 двете съвпадат, т.е. $\mathbf{B}$ е подформула на $\mathbf{A}$.

□

За да можем да записваме формулите в по-обичаен вид, а така също и за да можем да използваме и другите познати логически връзки, въвеждаме следните съкращения:

- Ще пишем $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$ вместо $\vee\mathbf{AB}$;
- Ще пишем $(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ вместо $(\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$;
- Ще пишем $(\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B})$ вместо $\neg(\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})$;
- Ще пишем $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$ вместо $((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \,\&\, (\mathbf{B} \to \mathbf{A}))$.

Така формулата

$$((P_0 \,\&\, P_1) \to P_1)$$

е съкращение за формулата

$$\vee\neg\neg \vee \neg P_0 \neg P_1 P_1,$$

а формулата

$$((P_2 \vee P_3) \leftrightarrow (P_3 \vee P_2))$$

е съкращение за формулата

$$\neg \vee \neg \vee \neg \vee P_2 P_3 \vee P_3 P_2 \neg \vee \neg \vee P_3 P_2 \vee P_2 P_3.$$

Символът & се нарича *конюнкция* и се чете като „и“ или още „верни са и двете твърденията“. Символът $\to$ се нарича *импликация* и се чете като "ако ..., то ...“. Символът $\leftrightarrow$ се нарича *еквивалентност* и се чете като „точно тогава, когато“.

Ще направим още две уговорки, които допълнително ще опростят записа. Първо ще изпускаме записването на най-външните скоби във формулата. Така например формулата $(P_0 \to (P_0 \vee P_1))$ ще записваме чрез $P_0 \to (P_0 \vee P_1)$, а формулата $(\neg\neg P_0 \leftrightarrow P_0)$ чрез $\neg\neg P_0 \leftrightarrow P_0$. Второ, в случай в записа на някоя формула са пропуснати скоби ще считаме, че скобите са групирани вдясно, т.е. най-дясната връзка, която не е заградена в скоби е с най-висок приоритет. Така например ще пишем $P_0 \vee P_1 \vee P_0$ вместо $P_0 \vee (P_1 \vee P_0)$ и $P_0 \to P_1 \to P_2$ вместо $P_0 \to (P_1 \to P_2)$.