Глава 2

Предикатно смятане от първи ред

2.1 Език на предикатното смятане от първи ред

Езикът на предикатното смятане от първи ред се състои от *индивидни променливи*, *логически символи*, *нелогически символи*, *термове* и *формули*. Индивидните променливи са фиксиран безкраен списък от символи. В рамките на тази книга индивидните променливи ще бъдат

$$x, y, z, x_0, y_0, z_0 x_1, y_1, z_1 \dots$$

Логическите символи, които изполвахме в предната глава, са логически символи и на езиците от първи ред. Отново $\vee$ и $\neg$ играят ролята на основни символи, а символите $\&$, $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$ ще дефинираме като съкращения. Освен символите, служещи за връзки между различните съждения, за логически символи ще считаме символа за равенство $=$ (който ще считаме за двуместен предикатен символ) и кванторa за съществуване $\exists$.

Нелогическите символи се разделят на две категории — *функционални* и *предикатни*. Ролята на функционални и предикатни символи може да се играе от кой да е набор от символи, различни от символите, фиксирани за индивидни променливи и логически символи. С всеки функционален и предикатен символ трябва да бъде свързано естествено число, което ще наричаме местност на символа. Когато говорим абстрактно за език от първи ред функционалните символи ще означаваме с $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}_0$, $\mathbf{f}_1$, $\dots$, а предикатните с $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\dots$. Стандартни примери за функционални символи от алгебрата и анализа са: 0-местните 0, 1, 2, $\dots$, както и e и π; 1-местните sin, cos, tg и ctg; двуместните . и +. Стандартни примери за предикатни символи са: 2-местните $<$, $\leqslant$ и $||$; 3-местния $\equiv \mod$.

Използвайки променливите и функционалните символи на езика строим *термовете* на езика по следната схема:

1. Всяка променлива е терм;

2. Ако $\mathbf{f}$ е n-местен функционален символ, а $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\dots$, $\mathbf{a}_n$ са термове, то $\mathbf{f}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\dots\mathbf{a}_n$ е терм.

Ясно е, че за всеки език от първи ред x, y, z, x_0, y_0, z_0 $\dots$ са термове. Ако 0 е символ на езика (0-местен), то 0 е терм на езика. Ако допълнително предположим, че + е символ на езика (2-местен), то тогава

$$+00, +0x \text{ и } ++x+0y+00$$

също са термове.

Лема 2.1. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са термове. Ако $\mathbf{a}$ е префикс на $\mathbf{b}$ то $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$.

Доказателство. Нека първо отбележим, че $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ съдържат поне един символ. Ще докажем твърдението на лемата с иднукция по дължината на $\mathbf{b}$.

(i) $\mathbf{b}$ се състои от един символ. Тогава очевидно $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$.

(ii) $\mathbf{b}$ се състои от повече от един символ. Тогава $\mathbf{b} \equiv \mathbf{f}\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n$ за някой n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ и термове $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$. Тъй като $\mathbf{a}$ е префикс на $\mathbf{b}$, то $\mathbf{a}$ започва със символа $\mathbf{f}$ и значи $\mathbf{a} \equiv \mathbf{f}\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ за някои термове $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Оттук и това, че $\mathbf{a}$ е префикс на $\mathbf{b}$, следва, че $\mathbf{a}_1$ е префикс на $\mathbf{b}_1$ или $\mathbf{b}_1$ е префикс на $\mathbf{a}_1$. Но термовете $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}_1$ имат дължини по-малки от дължината на $\mathbf{b}$ и следователно, съгласно индукционното предположение $\mathbf{a}_1 \equiv \mathbf{b}_1$. Сега, прилагайки това разсъждение още $n-1$ пъти, последователно получаваме $\mathbf{a}_2 \equiv \mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_3 \equiv \mathbf{b}_3$,$\dots$, $\mathbf{a}_n \equiv \mathbf{b}_n$ и значи $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$

□

Теорема 2.2. Нека $\mathbf{a}$ е терм. Тогава е вярно точно едно от следните твърдения:

1. Съществува единствена променлива $\mathbf{x}$, такава че $\mathbf{a} \equiv \mathbf{x}$

2. Съществуват единствен (n-местен) функционален символ $\mathbf{f}$ и единствени термове $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_n$, такива че $\mathbf{a} \equiv \mathbf{f}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n$.

Доказателство. Нека първо $\mathbf{a}$ съдържа един единствен символ. Тогава този символ е или променлива, или 0-местен функционален символ и те са еднозначно определени.

Нека сега $\mathbf{a}$ съдържа повече от един символ. Тогава първия символ на $\mathbf{a}$ е функционален символ. Нека този символ е $\mathbf{f}$ и неговата местност е равна на n. Да предположим, че $\mathbf{a} \equiv \mathbf{f}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n$ и $\mathbf{a} \equiv \mathbf{f}\mathbf{a}'_1\mathbf{a}'_2\ldots\mathbf{a}'_n$. Тогава

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n \equiv \mathbf{a}'_1\mathbf{a}'_2\ldots\mathbf{a}'_n$$

и следователно или $\mathbf{a}_1$ е префикс на $\mathbf{a}'_1$, или $\mathbf{a}'_1$ е префикс на $\mathbf{a}_1$. Съгласно предната лема $\mathbf{a}_1 \equiv \mathbf{a}'_1$. Оттук

$$\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\ldots\mathbf{a}_n \equiv \mathbf{a}'_2\mathbf{a}'_3\ldots\mathbf{a}'_n$$

и следователно или $\mathbf{a}_2$ е префикс на $\mathbf{a}'_2$, или $\mathbf{a}'_2$ е префикс на $\mathbf{a}_2$. Съгласно предната лема $\mathbf{a}_2 \equiv \mathbf{a}'_2$. Повтаряйки последователно това разсъждение още $n-2$ пъти, окончателно получаваме

$$\mathbf{a}_i \equiv \mathbf{a}'_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

което трябваше да докажем.

□

Сега използвайки термовете, предикатните и логическите символи дефинираме формулите на езика чрез следната индукция:

1. Ако $\mathbf{p}$ е n-местен функционален символ (символът $=$ е двуместен предикатен символ), а $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…,$\mathbf{a}_n$ са термове, то $\mathbf{p}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n$ е формула (атомарна формула).

2. Ако $\mathbf{B}$ е формула, то $\neg\mathbf{B}$ е формула.

3. Ако $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ е формула, то $\vee\mathbf{B}\mathbf{C}$ е формула.

4. Ако $\mathbf{B}$ е формула, а $\mathbf{x}$ е променлива, то $\exists\mathbf{x}\mathbf{B}$ е формула.

Ако 0 и $+$ са съответно 0-местен и 2-местен функционални символи, а $\leqslant$ е двуместен предикатен символ на езика, то тогава

$$\leqslant 0 + xy, \ \vee = x + +0x0 \leqslant x0, \ \neg\exists x \vee \neg = x0 = +xy + yz$$

са форули на езика. Подобно на термовете, за формулите на езика в сила са следните две твърдения.

Лема 2.3. Ако $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ са формули на език от първи ред и $\mathbf{A}$ е префикс на $\mathbf{B}$, то $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$

Теорема 2.4. Нека $\mathbf{A}$ е формула на език от първи ред. Тогава в сила е точно едно от следните твърдения:

1. Съществуват единствени n-местен предикатен символ $\mathbf{p}$ и термове $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…,$\mathbf{a}_n$, такива че $\mathbf{A} \equiv \mathbf{p}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n$.

2. Съществува единствена формула $\mathbf{B}$, такава че $\mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{B}$.

3. Съществуват единствени формули $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, такива че $\mathbf{A} \equiv \vee\mathbf{B}\mathbf{C}$.

4. Съществуват единствени променлива $\mathbf{x}$ и формула $\mathbf{B}$, такива че $\mathbf{A} \equiv \exists\mathbf{x}\mathbf{B}$.

Ще казваме, че поддумата α на думата β е *подтерм*, ако α е терм. В сила са следните синтактични свойства на подтермовете на даден терм.

Лема 2.5. Всеки символ на терма $\mathbf{a}$ е начало на единствен подтерм на $\mathbf{a}$.

Доказателство. Единствеността следва от Лема 2.1. За да докажем съществуването, нека първо забележим, че ако изберем първия символ на $\mathbf{a}$, то търсеният подтерм е самото $\mathbf{a}$. Нека сега сме избрали символ, различен от първия. В този случай $\mathbf{a}$ има поне два символа и значи $\mathbf{a} \equiv \mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n$ за някой n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ и термове $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, за които теоремата вече е доказана. Тогава избраният символ е символ от терма $\mathbf{a}_k$ за някое $1 \leqslant k \leqslant n$, откъдето той е начало на подтерм на $\mathbf{a}_k$ и значи е начало на подтерм на $\mathbf{a}$.

□

Теорема 2.6. Нека α е непразен суфикс на терма $\mathbf{a}$, β е непразен префикс на терма $\mathbf{b}$. Тогава думата $\alpha\beta$ не е терм.

Доказателство. Съгласно лемата първият символ на α е начало на единствен подтерм $\mathbf{a}'$ на $\mathbf{a}$. Да допуснем, че $\alpha\beta$ е терм. Тогава $\alpha\beta$ и $\mathbf{a}'$ са сравними и съгласно Лема 2.1 те съвпадат. Но тъй като β е непразна дума, то думата $\alpha\beta$ е по-дълга от $\mathbf{a}'$, което е невъзможно. Следователно $\alpha\beta$ не е терм.

□

Следствие 2.7. Нека $\mathbf{a} \equiv \mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n$ е терм, където $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ са термове. Тогава, ако $\mathbf{a}'$ е подтерм на $\mathbf{a}$, то е в сила точно едно от следните:

- $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}'$;
- $\mathbf{a}'$ е подтерм на $\mathbf{a}_k$ за някое $1 \leqslant k \leqslant n$.

Ще казваме, че поддумата α на думата β е *подформула*, ако α е формула. Аналогично на горните две твърдения, можем да докажем следните две основни синтактични свойства на подформулите.

Лема 2.8. Всеки символ на формулата $\mathbf{A}$ е начало на единствена поддума на $\mathbf{A}$, която е терм или формула.

Теорема 2.9. Нека α е непразен суфикс на формулата $\mathbf{A}$, а β е непразен префикс на формулата $\mathbf{B}$. Тогава думата $\alpha\beta$ не е нито терм, нито формула.

Нека да отбележим, че от тази теорема следва, че ако $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ и α е подформула (терм) на $\mathbf{A}$, то или α съвпада с $\mathbf{A}$, или α е подформула (терм) на $\mathbf{B}$, или α е подформула (терм) на $\mathbf{C}$. Този факт ще бъде използван многократно в следващите ни разглеждания.

Освен съкращенията, въведени в предишната глава, ще използваме още следните:

1. Когато $\mathbf{f}$ е двуместен функционален символ, а $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — термове, ще пищем $(\mathbf{a}\,\mathbf{f}\,\mathbf{b})$ вместо $\mathbf{fab}$;
2. Когато $\mathbf{p}$ е двуместен предикатен символ, а $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — термове, ще пищем $(\mathbf{a}\,\mathbf{p}\,\mathbf{b})$ вместо $\mathbf{pab}$;
3. Когато $\mathbf{p}$ е двуместен предикатен символ, а $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — термове, ще пищем $(\mathbf{a}\,\not{\mathbf{p}}\,\mathbf{b})$ вместо $\neg(\mathbf{a}\,\mathbf{p}\,\mathbf{b})$;
4. Ще пишем $\forall\mathbf{x}$ вместо $\neg\exists\mathbf{x}\neg$.

2.2 Свързани и свободни променливи

Да разгледаме следната формула на PA (т.е. отнасяща се до естествените числа)

$$\exists y(y.SS0 = x).$$

Интуитивно тя изказва следното: „x може да се представи като произведение на $SS0$ (т.е. 2) и някое естествено число“, т.е. „x е честно число“. Още тук се вижда, че променливите x и y играят различна роля — доколкото можем да избегнем споменаването на променливата y, то за променливата x това е невъзможно. В този смисъл формулата не зависи от (стойността) на y, но зависи от стойността на x. Наистина, нека да видим, какво се случва, като заместим x с терм. Нека първо заменим x с 0. Получаваме формулата

$$\exists y(y.SS0 = 0),$$

т.е. 0 е четно число, което е вярно. От друга страна, ако заменим x с $S0$ (т.е. 1), получаваме

$$\exists y(y.SS0 = S0),$$

т.е. 1 е четно, което, разбира се, е невярно твърдение. Ако сега заменим x с $x + z$, получаваме

$$\exists y(y.SS0 = x + z),$$

което казва, че $x + z$ е четно число.

От друга страна, ако се опитаме да заменим y с терм, то единственият случай, в който бихме получили формула е когато този терм е променлива. Наистина, ако заменим y с $S0$ или с $y + z$ получаваме съответно

$$\exists S0(S0.SS0 = x) \text{ и } \exists(y + z)((y + z).SS0 = x),$$

които не се формули.

За да различаваме двата типа променливи, ще използваме термините *свързано* и *свободно участие*, като едно участие е свързано, ако е в рамките на действието на квантор и е свободно в противен случай. По-точно:

Казваме, че едно участие (позиция, срещане) на променливата $\mathbf{x}$ във формулата $\mathbf{A}$ е *свързано*, ако то е в рамките на подформула на $\mathbf{A}$ от вида $\exists\mathbf{x}\mathbf{B}$ (а също и $\forall\mathbf{x}\mathbf{B}$, когато използваме съкращения). В противен случай казваме, че участието е *свободно*.

Така във формулата $x+y = 0$ и двете променливи се срещат само свободно, във формулата $\exists x(x > 0)$ променливата x се среща само свързано, а във формулата $x > 0 \vee \exists x(x.x = 0)$ първото срещане на x е свободно, а останалите 3 срещания са свързани.

Както видяхме по-горе, замествайки свободните участия на дадена променлива с терм отново получаваме формула. Не винаги обаче след заместването получанета формула изразява същото свойство като оригиналната. Наистина, да разгледаме отново формулата $\exists y(y.SS0 = x)$, изразяваща „x е четно“. Ако заместим x с терма y получаваме

$$\exists y(y.SS0 = y),$$

която не казва „y е четно“, а „съществува естествено число, което умножено по 2 дава себе си“. Аналогично, ако заместим x с терма $x + y$, получаваме

$$\exists y(y.SS0 = x + y),$$

което казва, че „към x можем да прибавим число, такова че да получим два пъти това число“, което отново е различно от това, че „$x + y$ е четно“. Проблемът и в двата случая произтича от това, че променливата y участва в заместващите термове, а свободното участие на x, което заместваме е в рамките на действието на квантор по y. Подобен тип термове ще считаме за неподходящи за замяна, а всички останали за подходящи. Точната дефиниция е следната:

Казваме, че термът $\mathbf{a}$ е *подходящ за замяна* на променливата $\mathbf{x}$ във формулата $\mathbf{A}$, ако нито едно свободно участие на $\mathbf{x}$ в $\mathbf{A}$ не попада под действието на квантор по променлива, участваща в $\mathbf{a}$ (т.е. не е част от подформула от вида $\exists\mathbf{y}\mathbf{B}$ (съответно $\forall\mathbf{y}\mathbf{B}$) за някоя променлива $\mathbf{y}$, участваща в $\mathbf{a}$).

Например термът $x+y$ е подходящ за замяна на x във формулата $\exists x\forall y(x+y = 0) \vee x > 0$ (тъй като единственото свободно участие на x във формулата не попада под действието на никакъв квантор), но не е подходящ за замяна на y във формулата $y > 0 \to \exists x(x.y > 0)$ (тъй като второто свободно участие на y във формулата е в рамките на квантор по x, което е променлива от терма).

Ще отбележим два тривиални случая на терм подходящ за замяна.

- ако $\mathbf{a}$ е затворен терм (т.е. терм без променливи), то $\mathbf{a}$ е подходящ за замяна на всяка променлива във всяка формула.
- ако променливата $\mathbf{x}$ не участва свободно или не участва изобщо във формулата $\mathbf{A}$, то всеки терм е подходящ за замяна на $\mathbf{x}$ в $\mathbf{A}$.

Ако $\mathbf{a}$ е терм подходящ за замяна на променливата $\mathbf{x}$ във формулата $\mathbf{A}$, то с $\mathbf{A_x[a]}$ ще означаваме резултата от едновременното заместване на всички свободни участия на $\mathbf{x}$ в $\mathbf{A}$ с $\mathbf{a}$.

Например, ако $\mathbf{A}$ е

$$\forall y \forall z (x = y.z \to (y = S0 \lor z = S0)),$$

а $\mathbf{a}$ е термът $x' + x''$, то $\mathbf{A}_x[\mathbf{a}]$ е формулата

$$\forall y \forall z (x' + x'' = y.z \to (y = S0 \lor z = S0)).$$

Нека още отбележим, че в тривиалния случай, в който $\mathbf{x}$ не участва свободно (или изобщо) във формулата $\mathbf{A}$, то $\mathbf{A_x[a]}$ е просто $\mathbf{A}$. Същото се отнася и в тривиалния случай, в който заместваме променливата $\mathbf{x}$ със самата себе си, т.е. $\mathbf{A_x[x]}$ е отново $\mathbf{A}$.

Ако $\mathbf{A}$ е формула, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ са различни променливи, а $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ са термове (необезателно различни) подходящи за замяна съответно на $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ в $\mathbf{A}$, то с $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$ ще означаваме резултата от *едновременното* заместване на свободните участия на $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ в $\mathbf{A}$ съответно с $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Изискването за едновременна замяна е съществено, тъй като не е едно и също дали ще заменяме променливите едновременно или последователно. Наистина, нека $\mathbf{A}$ е формулата $x < y$. Тогава замествайки едновременно x и y съответно с $x + y$ и z (т.е. образувайки $\mathbf{A}_{xy}[x + y, z]$) получаваме $x + y < z$, докато при последователно заместване първо на x, а после на y (т.е. образувайки $\mathbf{A}_x[x + y]_y[z]$) имаме $x + z < z$.

2.3 Аксиоми и правила на предикатното смятане от първи ред

Аксиомите на една формална система $\mathcal{F}$ се разделят на два вида — *логически* и *нелогически*. Логическите аксиоми се определят чрез следните схеми:

- (Съждителни аксиоми)
  $$\neg \mathbf{A} \lor \mathbf{A},$$
  за всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$;
- (Аксиоми за замяната)
  $$\mathbf{A_x[a]} \to \exists \mathbf{x} \mathbf{A},$$
  за всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$ и всеки терм $\mathbf{a}$ на $\mathcal{F}$, подходящ за замяна на $\mathbf{x}$ в $\mathbf{A}$.
- (Аксиома за тъждеството)
  $$x = x;$$
- (Аксиоми за равенството)
  $$x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to \mathbf{f} x_1 \ldots x_n = \mathbf{f} y_1 \ldots y_n$$
  за всяко n и всеки n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ на $\mathcal{F}$.
  $$x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to \mathbf{p} x_1 \ldots x_n \to \mathbf{p} y_1 \ldots y_n$$
  за всяко n и всеки n-местен предикатен символ $\mathbf{p}$ на $\mathcal{F}$.

Нека отбележим, че логическите аксиоми еднозначно се определят от *нелогическите* символите на формалната система. В частност, ако две формални системи имат едни и същи нелогически символи, то те имат едни и същи логически аксиоми.

Нека още да отбележим, че тъй като $=$ е двуместен (логически) предикатен символ, то формулата

$$x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to x_1 = x_2 \to y_1 = y_2$$

е аксиома (за равенството) на всяка формална система от първи ред.

Нелогическите аксиоми на една формална система от първи ред е произволен набор (краен или безкраен) от формули на системата.

Правилата на всяка формална система от първи ред се изразяват, чрез следните схеми:

(ПР) $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{B} \vee \mathbf{A}}$ (Правило за разширяването)

(ПСв) $\dfrac{\mathbf{A} \vee \mathbf{A}}{\mathbf{A}}$ (Правило за свиването)

(ПА) $\dfrac{\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})}{(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}}$ (Правило за асоциативност)

(ПС) $\dfrac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B},\ \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}}{\mathbf{B} \vee \mathbf{C}}$ (Правило за съкращението)

(П∃) $\dfrac{\mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\exists \mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{B}}$, където $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$

Тъй като схемите за съждителните аксиоми и за първите четири правила са същите като тези на съждителното смятане, всички разсъждения, които направихме на съждителното смятане остават в сила. Единственото нещо, което трябва да направим за да можем да формулираме коректно теоремата за тавтологиите, е да формулираме понятието тавтология за формална система от първи ред.

Дефиниция 2.10. Казваме, че формулата $\mathbf{A}$ на формалната система от първи ред $\mathcal{F}$ е тавтология, ако $\mathbf{A}$ се получава от съждителна тавтология $\mathbf{B}$, замествайки съждителни ѝ променливи $P_{i_0}, P_{i_1}, \dots P_{i_n}$ съответно с формули $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ на $\mathcal{F}$.

Например, от съждителната тавтология

$$(P_0 \,\&\, P_1) \to P_1,$$

можем да получим тавтологиите на $\mathcal{F}$

$$(x = x \,\&\, x = y) \to x = y \quad \text{и} \quad (x \neq y \,\&\, z = y) \to z = y.$$

Вече сме готови да формулираме теоремата за тавтологиите на предикатното смятане от първи ред.

Теорема 2.11 (Теорема за тавтологиите)**.** Нека формулата $\mathbf{A}$ е тавтологично следствие (в $\mathcal{F}$) на формулите $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ (т.е. формулата $\mathbf{A}_1 \to \dots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}$ е тавтология на $\mathcal{F}$). Тогава, ако $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n$, то $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$.

Нека отбележим, че теоремата за тавтологии следва изцяло от съждителните аксиоми $(\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A})$ и съждителните правила (ПР, ПСв, ПА и ПС). Нещо повече, всяко едно от заключенията на правилата (ПР), (ПСв), (ПА) и (ПС) са тавтологични следвия на съответните хипотези, т.е. тези правила са частен случай на теоремата за тавтологиите.

В по-нататъчните ни разглеждания ще имаме нужда от следното твърдение.

Теорема 2.12. Нека * е (синтактична) операция върху формули, такава че $(\neg\mathbf{A}^*) \equiv \neg\mathbf{A}^*$ и $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^* \equiv \mathbf{A}^* \vee \mathbf{B}^*$ за всеки избор на формули $\mathbf{A}, \mathbf{B}$. Тогава, ако формула $\mathbf{A}$ е тавтологично следствие на формулите $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$, то $\mathbf{A}^*$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_1^*, \dots, \mathbf{A}_n^*$

Доказателство. (Идея) Нека $\mathbf{A}$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, т.е. $\mathbf{A}_1 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}$ е тавтология. Следователно тази формула се получава от съждителна тавтология, да речем $\mathbf{B}$, замествайки съждителните ѝ променливи $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ съответно с предикатни формули $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$. Тъй като * преминава през отрицанието и дизюнкцията, то

$$(\mathbf{A}_1 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{A})^* \equiv \mathbf{A}_1^* \to \cdots \mathbf{A}_n^* \to \mathbf{A}^*$$

и тази формула се получава от $\mathbf{B}$, замествайки $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ съответно с формулите $\mathbf{B}_1^*, \ldots, \mathbf{B}_n^*$. Оттук $\mathbf{A}_1^* \to \cdots \mathbf{A}_n^* \to \mathbf{A}^*$ е тавтология и значи $\mathbf{A}^*$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_1^*, \ldots, \mathbf{A}_n^*$.

$\square$