Лекция 5: Принципи на изброителната комбинаторика

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

31 октомври 2023 г.

Комбинаториката е дял на дискретната математика, чийто предмет е изброяването на някакви обекти, наречени *комбинаторни структури* или *комбинаторни конфигурации*. Какви са тези комбинаторни структури ще стане ясно нататък.

Изброителната комбинаторика търси точни формули за бройките на тези обекти.

Аналитичната комбинаторика ползва средства от математическия анализ, за да брои комбинаторни структури, но не чрез точни формули, а чрез асимптотични формули.

Като прост пример, нека X и Y са крайни множества и $|X| = |Y| = n$. Колко повече са частичните функции $f : X \to Y$ от тоталните функции $g : X \to Y$, при n клонящо към безкрайност? Първите са $(n+1)^n$, вторите са n^n, оттук

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Ще разгледаме няколко основни закона на комбинаториката. Те не са аксиоми: всеки от тях може да бъде доказан.

Ще направим подробно доказателство само на принципа на включването и изключването.

Оттук нататък всички множества, които разглеждаме, са крайни, освен ако изрично не е казано, че са безкрайни.

Принцип на Dirichlet (the pigeonhole principle)

Известен още като принцип на чекмеджетата. На английски е the pigeonhole principle. Гласи следното: ако X и Y са крайни множества и $|X| > |Y|$, то не съществува инекция $f : X \to Y$.

Алтернативна формулировка: ако има m ябълки в n чекмеджета и $m > n$, то в поне едно чекмедже има повече от една ябълка.

Обобщен принцип на Dirichlet: ако има $kn + 1$ ябълки в n чекмеджета, то в поне едно чекмедже има повече от k ябълки.

Теорема 1

Нека A е крайно множество и нека $R \subseteq A^2$ е частична наредба. Тогава R има поне един минимален и поне един максимален елемент.

БОО, ще докажем само факта, че съществува минимален елемент. Да допуснем противното. Тогава съществува крайно A и поне една частична наредба R над A, такава че R няма минимален елемент.

Едно приложение на принципа на Dirichlet (2)

Избираме произволен $a \in A$. По допускане, a не е минимален, така че съществува $b \in A$, такъв че $b \neq a$ и bRa.

По допускане, b не е минимален, така че съществува $c \in A$, такъв че $c \neq b$ и cRb.

И така нататък. Може да изградим колкото искаме дълга верига, завършваща на a:

$$p = z, \cdots, c, b, a$$

Правим p с повече от $|A|$ елементи. Съгласно принципа на Dirichlet, p съдържа поне едно повтарящ се елемент x.

В общия случай, p изглежда така

$$p = z, \cdots, x, \cdots, x, \cdots, c, b, a$$

Може x да е a, или b, или c, или z. Не правим никакви допускания за това. Важното е, че има повтарящ се елемент. Знаем, че двете появи на x не са съседни – дефиницията на "верига" не го позволява.

Забелязваме, че в R има контур:

$$p = z, \cdots, \underbrace{x, \cdots, x}_{\text{това е контур}}, \cdots, c, b, a$$

Това противоречи на теоремата, според която в частичните наредби няма контури. ↯

Теорема 2

Нека A е крайно множество, $|A| = n$ и $R \subseteq A^2$ е частична наредба. Тогава съществува поне едно линейно разширение R' на R.

Доказателството е конструктивно: с алгоритъм, известен като *Topological Sorting*. Няма да строим самото линейно разширение R', а ще построим $B[1, \ldots, n]$, в който ще разположим елементите на A. Разполагането на елементи на множество в масив задава еднозначно линейна наредба. Формално, B и R' са съвършено различни обекти; най-малкото, $|R'| = \frac{n(n+1)}{2}$. Но R' може да бъде конструирана лесно от B.

Вход: крайно A, като $|A| = n$; частична наредба $R \subseteq A^2$
Изход: масив B, реализиращ линейно разширение R' на R

1. $i \leftarrow 1$
2. избираме произволен $a \in A$, който е минимален елемент на R
3. $B[i] \leftarrow a$, изтриваме a от A и от R, правим $i{+}{+}$
4. ако $i = n + 1$, върни B, в противен случай иди на 2.

Алгоритъмът е коректен, тъй като в началото има поне един минимален елемент съгласно Теорема 1, а при всяка следващо достигане на ред 2 пак има поне един минимален елемент, тъй като изтриване на елемент от релацията не може да образува цикъл, ерго тя остава частична наредба след всяко изтриване на ред 3.

Принцип на разбиването (събирането)

Дадено е множество X и разбиване $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_k\}$ на X. Тогава

$$|X| = |Y_1| + \cdots + |Y_k| \tag{1}$$

Забележете, че това остава в сила дори някои от множествата $Y_1, \ldots, Y_k$ да са празни. Съгласно формалната дефиниция, това не би било разбиване, но (1) остава в сила: мощностите на празните Y_i са нули и те не се отразяват на сумата.

Приемаме този принцип за очевиден и няма да правим доказателство.

Принцип на изваждането

Това е тривиално следствие от принципа на разбиването. Нека е дадено множество A в универсум U. Тогава

$$|A| = |U| - |\overline{A}| \tag{2}$$

Очевидно $\{A, \overline{A}\}$ е разбиване на универсума, така че от принципа на разбиването имаме $|U| = |A| + |\overline{A}|$.

Не е невъзможно $\overline{A}$ да е празно, но и тогава (2) остава в сила.

Принцип на умножението

Нека A и B са множества. Тогава

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Приемаме го за очевиден и без доказателство.

Естествено обобщение е следното. Ако $A_1, \ldots, A_k$ са множества, то

$$|A_1 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot \cdots \cdot |A_k|$$

Написано по по-икономичен начин:

$$\left| \bigtimes_{i=1}^{k} A_i \right| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$$

Принцип на биекцията

Нека A и B са множества. $|A| = |B|$ тогава и само тогава, когато съществува биекция $f : A \to B$.

Това е тривиален извод от дефиницията на мощност на множество.

Този принцип е много полезен, когато, за да изброим някакви обекти, изброяваме други обекти и показваме, че съществува биекция между двете множества от обекти.

Принцип на делението

Нека A е множество. Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. Нека A има k класа на еквивалентност и всеки клас на еквивалентност има кардиналност m. Тогава

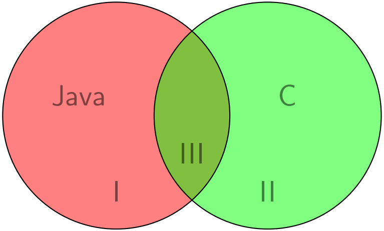
$$m = \frac{|A|}{k}$$

Принципът на включването и изключването се явява обобщение на принципа на разбиването. При разбиването намираме кардиналност на множество като сума от кардиналностите на дяловете на някое негово разбиване. Сега е дадено покриване на множеството и намираме кардиналността на множеството, като събираме и изваждаме кардиналностите на дяловете на покриването, техните сечения по двойки, по тройки и така нататък.

Дадена е група студенти. 10 от тях посещават практикум по Java, 12 посещават практикум по C и е известно, че всеки студент посещава поне един практикум. От колко студента се състои групата?

Нека групата е A. Очевидно $12 \leqslant |A| \leqslant 22$, като тези граници са точни.

Ако обаче е известно, че точно 2-ма студенти посещават и Java, и C, веднага следва, че $|A| = 20$. По-подробно, $|A| = 10 + 12 - 2 = 20$.



Сумата $10 + 12 = 22$ брои прекалено много (overcounting). Тя брои райони I и II правилно, по веднъж, но брои район III неправилно: два пъти.

Сумата $10 + 12 - 2 = 20$ брои всеки район точно веднъж.

Принцип на включването и изключването (4)

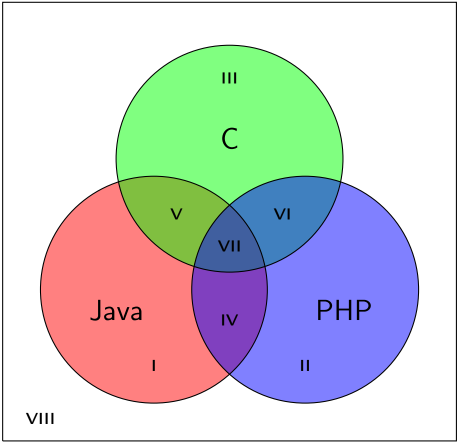
По-сложен пример (1)

Дадена е група студенти. 20 посещават практикум по Java, 19 по C и 17 по PHP. 8 посещават Java и C, 7 посещават Java и PHP, 8 посещават C и PHP. 3 посещават и трите практикума. Групата се състои от 46 студенти. Колко студенти не посещават нито един от трите практикума?

Отговорът е

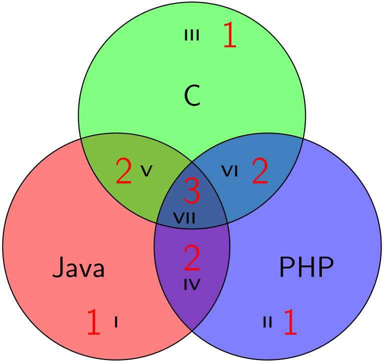
$$46 - (20 + 19 + 17) + (8 + 7 + 8) - 3 = 46 - 56 + 23 - 3 = 10$$

$(20 + 19 + 17) - (8 + 7 + 8) + 3 = 36$ е броят на студентите в поне един практикум. Да видим защо.



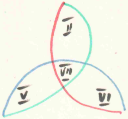
Търсим кардиналността на обединението на Java, C и PHP.

I, . . . , VIII са районите. I са тези, които ходят само на Java, V са само на Java и C, и т.н. Ние не знаем кардиналностите на районите, освен на VII. Ако ги знаехме, задачата щеше да е много лесна.



Сумата $20 + 19 + 17$ брои I, II и III по един път, но IV, V и VI биват броени по два пъти, а тримата студенти от VII биват броени три пъти от тази сума.

Заради това 56 е повече от кардиналността на обединението.



$8+7+8$ брои II, V и VI
веднъж и VII три пъти.
Тогава $(20+19+17)-(8+7+8)$
брои I, III, IV, II, V и VI по
веднъж (правилно!),
но брои VII нула пъти.

$(20+19+17)-(8+7+8)+3$ брои
всеки от районите I..VII веднъж
Тогава 36 студенти ходят
на поне един факт., така че
$46-36=10$ не ходят на
нито един.

Теорема 3

За всяко $n \geqslant 1$, за всеки n множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \quad (3)$$

Доказателството е със **силна индукция** по n. Базата е $n = 1$. (3) става $|A_1| = |A_1|$. ✓ Индукционното предположение е, че за всяко $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, за **всеки** k множества $B_1, \ldots, B_k$:

$$|B_1 \cup \cdots \cup B_k| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} |B_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} |B_i \cap B_j| - \cdots + (-1)^{k-1} |B_1 \cap \cdots \cap B_k| \quad (4)$$

В частност, при $k = n - 1$ и мн-ва $A_1, \ldots, A_{n-1}$, предп. става:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}| \quad (5)$$

Индукционната стъпка е за стойност на аргумента n. В сила е

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n| = |\underbrace{(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})}_{X} \cup \underbrace{A_n}_{Y}| =$$

$$|\underbrace{A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}}_{X}| + |\underbrace{A_n}_{Y}| - |\underbrace{(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})}_{X} \cap \underbrace{A_n}_{Y}| \quad (6)$$

тъй като $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ (от (4) при $k = 2$).

Знаем колко е $|A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}|$ от (5). Да разгледаме $|(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n|$.

В сила е

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n = (A_1 \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cap A_n) \qquad (7)$$

заради дистрибутивността на сечението спрямо обединението.

Дясната страна на (7) е обединение на $n-1$ множества и (4) е приложимо с $k = n-1$ и $B_1 = A_1 \cap A_n, \ldots, B_{n-1} = A_{n-1} \cap A_n$. Съгласно (4):

$$\begin{aligned}|(A_1 \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cap A_n)| = &+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i \cap A_n| \\ &- \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n)| + \\ &+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n-1} |(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n) \cap (A_k \cap A_n)| \\ &\cdots \\ &+ (-1)^{n-2} |(A_1 \cap A_n) \cap \cdots \cap (A_{n-1} \cap A_n)| \qquad (8)\end{aligned}$$

Опростявайки дясната страна на (8) и предвид (7), получаваме

$$
\begin{aligned}
|(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n| = &+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i \cap A_n| \\
&- \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| + \\
&+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_n| \\
&\cdots \\
&+ (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n| \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Принцип на включването и изключването (13)

В дясната страна на (6) заместваме съгласно (5) и (9) и получаваме

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n| =$$

$$\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}| \right)$$

$$+ |A_n|$$

$$- \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i \cap A_n| - \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n| \right) =$$

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}|$$

$$- \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i \cap A_n| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n| \qquad (10)$$

В дясната страна на (10) групираме събираемите от горния и долния ред по подходящ начин:

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n-1}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-2}|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}|$$

$$-\sum_{1\leqslant i\leqslant n-1}|A_i\cap A_n| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|A_i\cap A_j\cap A_n| - \cdots + (-1)^{n-2}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{n-2}\leqslant n-1}|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{n-2}}\cap A_n| + (-1)^{n-1}|A_1\cap\cdots\cap A_n| =$$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-2}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{n-1}\leqslant n}|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{n-1}}| + (-1)^{n-1}|A_1\cap\cdots\cap A_n|$$

Получихме дясната страна на (3). $\square$

Символно, групирания и опростявания в дясната страна на (10) са следните

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| \text{ не се групира с нищо;}$$

$$-\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i \cap A_n| = -\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j|;$$

$$\sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| = \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k|;$$

$$\ldots$$

$$(-1)^{n-2}|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}| \text{ се групира с } (-1)^{n-2} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{n-2} \leqslant n-1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-2}} \cap A_n|;$$

$$(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n| \text{ не се групира с нищо.}$$

Това е лесно следствие от Теорема 3.

Следствие 1

За всяко $n \geqslant 1$, за всеки n множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, намиращи се в произволен универсум U:

$$|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = |U| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \quad (11)$$

Доказателство: Имаме

$$|\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}| = |U| - |A_1 \cup \cdots \cup A_n| \quad (12)$$

от принципа на изваждането.

Лявата страна на (12) е $|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|$ по обобщения закон на De Morgan, а в дясната му страна заместваме $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$ с израза от (3). Получаваме (11). □

КРАЙ