2.4 Породени правила за кванторите

Следващата ни задача е да изведем допълнителни правила, с чиято помощ да улесним процеса на формално доказателство.

(П$\forall$) $\dfrac{\mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\mathbf{A} \to \forall \mathbf{x} \mathbf{B}}$, където $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{A}$.

Доказателство.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\neg \mathbf{B} \to \neg \mathbf{A}}\,(\text{TT})}{\exists \mathbf{x} \neg \mathbf{B} \to \neg \mathbf{A}}\,(\text{П}\exists)}{\mathbf{A} \to \forall \mathbf{x} \mathbf{B}}\,(\text{TT})$$

$\square$

(ПОб) $\dfrac{\mathbf{A}}{\forall \mathbf{x} \mathbf{A}}$ (правило за обобщението)

Доказателство.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{A}}{\neg \mathbf{A} \to \forall \mathbf{x} \mathbf{A}}\,(\text{TT})}{\exists \mathbf{x} \neg \mathbf{A} \to \forall \mathbf{x} \mathbf{A}}\,(\text{П}\exists)}{\forall \mathbf{x} \mathbf{A}}\,(\text{TT})$$

$\square$

(ТСуб) $\dfrac{}{\forall \mathbf{x} \mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]}$ (теорема за субституцията)

Доказателство.

$$\cfrac{\cfrac{}{\neg \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}] \to \exists \mathbf{x} \neg \mathbf{A}}\,(\text{АксСуб})}{\forall \mathbf{x} \mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]}\,(\text{TT})$$

$\square$

Нека $\mathbf{A}$ е формула със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ (необезателно различни). Тогава формулата $\forall \mathbf{x}_1 \dots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A}$ ще наричаме *универсално затваряне* на $\mathbf{A}$.

Твърдение 2.13. Всяка формула е равнодоказуема с всяко свое универсално затваряне.

Доказателство. Нека $\mathbf{A}$ е формула и $\mathbf{A}' \equiv \forall \mathbf{x}_1 \dots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A}$ е нейно универсално затваряне. Нека първо $\mathbf{A}$ е теорема. Тогава

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{A}}{\forall \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\,(\text{ПОб})}{\forall \mathbf{x}_{n-1} \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\,(\text{ПОб})}{\vdots}\,(\text{ПОб})}{\forall \mathbf{x}_2 \dots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\,(\text{ПОб})}{\mathbf{A}'}\,(\text{ПОб})$$

Обратно, нека $\mathbf{A}'$ е теорема. Тогава

$$\dfrac{\mathbf{A}' \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathbf{A}' \to \forall \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\text{(TСуб)} \quad \dfrac{}{\forall \mathbf{x}_2 \ldots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \forall \mathbf{x}_3 \ldots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\text{(TСуб)} \quad \ldots \dfrac{}{\forall \mathbf{x}_1 \mathbf{A} \to \mathbf{A}}\text{(TСуб)}}{\mathbf{A}' \to \mathbf{A}}\text{(TT)}}{\mathbf{A}}\text{(TT)}$$

□

(ПЗ)	$\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]}$	(правило за замяната)

Доказателство. Нека първо $n = 1$, т.е имаме формула $\mathbf{A}$ променлива $\mathbf{x}$ и терм $\mathbf{a}$, подходящ за замяна на $\mathbf{x}$ в $\mathbf{A}$. Тогава

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{A}}{\forall \mathbf{x} \mathbf{A}}\text{(ПОб)} \quad \dfrac{}{\forall \mathbf{x} \mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]}\text{(TСуб)}}{\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]}\text{(TT)}$$

Нека сега $n > 1$, $\mathbf{A}$ е формула, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ са различни променливи и $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ са термове, подходящи за замяна на $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ в $\mathbf{A}$. Нека $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ са нови, различни променливи. Нека $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n]$. Заради избора на променливите $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ имаме

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n] &\equiv \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1}[\mathbf{y}_1]_{\mathbf{x}_2}[\mathbf{y}_2] \ldots_{\mathbf{x}_n} [\mathbf{y}_n], \\ \mathbf{B}_{\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] &\equiv \mathbf{B}_{\mathbf{y}_1}[\mathbf{a}_1]_{\mathbf{y}_2}[\mathbf{a}_2] \ldots_{\mathbf{y}_n} [\mathbf{a}_n] \end{aligned}$$

като при това

$$\mathbf{B}_{\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \equiv \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$$

Следователно, прилагайки $2n$-пъти първият случай, получаваме

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1}[\mathbf{y}_1] \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1}[\mathbf{y}_1]_{\mathbf{x}_2}[\mathbf{y}_2] \ldots_{\mathbf{x}_{n-1}} [\mathbf{y}_{n-1}] \\ \hline \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B}_{\mathbf{y}_1}[\mathbf{a}_1] \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{\mathbf{y}_1}[\mathbf{a}_1]_{\mathbf{y}_2}[\mathbf{a}_2] \ldots_{\mathbf{y}_{n-1}} [\mathbf{a}_{n-1}] \\ \hline \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \end{array}$$

□

(Тсуб)	$\dfrac{}{\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \to \exists \mathbf{x}_1 \ldots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A}}$	$\dfrac{}{\forall \mathbf{x}_1 \ldots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]}$

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{A} \to \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\text{(АСуб)} \quad \dfrac{}{\exists \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \exists \mathbf{x}_{n-1} \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\text{(АСуб)} \quad \ldots \dfrac{}{\exists \mathbf{x}_2 \ldots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \exists \mathbf{x}_1 \ldots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\text{(АСуб)}}{\mathbf{A} \to \exists \mathbf{x}_1 \ldots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\text{(TT)}}{\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \to \exists \mathbf{x}_1 \ldots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\text{(ПЗ)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall \mathbf{x}_1 \ldots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \forall \mathbf{x}_2 \ldots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\text{(ЛСуб)} \quad \dfrac{}{\forall \mathbf{x}_2 \ldots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \forall \mathbf{x}_3 \ldots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\text{(ЛСуб)} \quad \ldots \dfrac{}{\forall \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \mathbf{A}}\text{(ЛСуб)}}{\forall \mathbf{x}_1 \ldots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \mathbf{A}}\text{(TT)}}{\forall \mathbf{x}_1 \ldots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]}\text{(ПЗ)}$$

□

(П∃∃)	$\dfrac{\mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\exists \mathbf{A} \to \exists \mathbf{B}}$	(П∀∀)	$\dfrac{\mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\forall \mathbf{A} \to \forall \mathbf{B}}$

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{A} \to \mathbf{B} \quad \dfrac{}{\mathbf{B} \to \exists \mathbf{x} \mathbf{B}}\ (\text{АСуб})}{\mathbf{A} \to \exists \mathbf{x} \mathbf{B}}\ (\text{TT})}{\exists \mathbf{A} \to \exists \mathbf{B}}\ (\text{П}\exists)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall \mathbf{x} \mathbf{A} \to \mathbf{A}}\ (\text{ТСуб}) \quad \mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\forall \mathbf{x} \mathbf{A} \to \mathbf{B}}\ (\text{TT})}{\forall \mathbf{A} \to \forall \mathbf{B}}\ (\text{П}\forall)$$

□

2.5 Теорема за еквивалентната замяна. Теорема за варианта

В следващата теорема ще докажем добре познатото правило, че еквивалентни твърдения са взаимнозаменяеми.

Теорема 2.14. Нека формулата $\mathbf{A}'$ се получава от формулата $\mathbf{A}$, замествайки нула, едно, няколко или всички срещания на формулите $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ съответно с формулите $\mathbf{B}'_1, \ldots, \mathbf{B}'_n$. Тогава, ако $\mathbf{B}_i \leftrightarrow \mathbf{B}'_i$ е теорема за $1 \leqslant i \leqslant n$, то $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ също е теорема.

Доказателство. Достатъчно е да докажем теоремата в случая $n = 1$. Нека $\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B}'$ е теорема. Ще докажем с индукция по построението на формулата $\mathbf{A}$, че ако $\mathbf{A}'$ се получава от $\mathbf{A}$ чрез заместване на $\mathbf{B}$ с $\mathbf{B}'$, то $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ е теорема.

Нека първо разгледаме случая $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A}$ (той се получава, когато не извършваме никакви замени, или пък $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}'$). Тогава $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ съгласно (TT).

Нека сега $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{A}'$. Тогава най-простата възможност е $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. В този случай $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{B}'$ и следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ по условие. Остава да разгледаме случая $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{B}$ (продължавайки да предполагаме $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{A}'$).

Нека първо $\mathbf{A} \equiv \mathbf{C} \vee \mathbf{D}$. Тогава тъй като всяка подформула на $\mathbf{A}$, различна от $\mathbf{A}$, е или подформула на $\mathbf{C}$, или подформула на $\mathbf{D}$, то $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{C}' \vee \mathbf{D}'$, където $\mathbf{C}'$ и $\mathbf{D}'$ са получени от $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ чрез замени на $\mathbf{B}$ с $\mathbf{B}'$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{C}'$ и $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{D}'$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ съгласно (TT).

Нека сега $\mathbf{A} \equiv \neg \mathbf{C}$. Тогава тъй като всяка подформула на $\mathbf{A}$, различна от $\mathbf{A}$, е подформула на $\mathbf{C}$ то $\mathbf{A}' \equiv \neg \mathbf{C}'$, където $\mathbf{C}'$ е получена от $\mathbf{C}$ чрез замени на $\mathbf{B}$ с $\mathbf{B}'$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{C}'$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ съгласно (TT).

Нека накрая $\mathbf{A} \equiv \exists \mathbf{x} \mathbf{C}$. Тогава тъй като всяка подформула на $\mathbf{A}$, различна от $\mathbf{A}$, е подформула на $\mathbf{C}$ то $\mathbf{A}' \equiv \exists \mathbf{x} \mathbf{C}'$, където $\mathbf{C}'$ е получена от $\mathbf{C}$ чрез замени на $\mathbf{B}$ с $\mathbf{B}'$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{C}'$, откъдето

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{C}'}{\mathbf{C} \to \mathbf{C}'}\ (\text{TT})}{\exists \mathbf{x} \mathbf{C} \to \exists \mathbf{x} \mathbf{C}'}\ (\text{П}\exists\exists) \quad \dfrac{\dfrac{\mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{C}'}{\mathbf{C}' \to \mathbf{C}}\ (\text{TT})}{\exists \mathbf{x} \mathbf{C}' \to \exists \mathbf{x} \mathbf{C}}\ (\text{П}\exists\exists)}{\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'}\ (\text{TT})$$

□

Да разгледаме формулата

$$\exists y(x = y.SS0).$$

Както видяхме, тази формула изказва свойството „x е четно число“. При това, ако заменим x се терм $\mathbf{a}$, който не съдържа променливата y, то получената формула

$$\exists y(\mathbf{a} = y.SS0)$$

изказва „$\mathbf{a}$ е четно число“. Ако обаче искаме да изкажем „y е четно число“, то това няма да може да бъде направено чрез замяна на x с y в първоначалната формула, защото формулата

$$\exists y(y = y.SS0)$$

изказва „съществува число, което е равно на два пъти себе си“. Да забележим обаче, че в изказването „x е четно число“ никъде не се споменава променливата y. Следователно формулата

$$\exists z(x = z.SS0)$$

отново изказва „x е четно число“ и в нея вече е допустимо да заменим x с y, като по този начин изкажем свойството „y е четно число“.. Последната формула се получава от първоначалната чрез „преименуване“ на свързаната променлива y. Да отбележим, че за да запазим смисъла на първоначалната формула y може да бъде преименувана, с коя да е променлива, различна от x, т.е. с коя да е променлива, неучастваща свободно в рамките на действието на квантора, която преименуваме.

В общата ситуация въвеждаме следното понятие.

Казваме, че формулата $\mathbf{A}'$ е вариант на формулата $\mathbf{A}$, ако $\mathbf{A}'$ се получава от $\mathbf{A}$ чрез последователни замени на подформули от вида $\exists \mathbf{x}\mathbf{B}$ с $\exists \mathbf{y}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]$, където $\mathbf{y}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$.

Да отбележим, че $\mathbf{A}$ е вариант на $\mathbf{A}$. Освен това, ако $\mathbf{A}$ не съдържа квантори, то единствения вариант на $\mathbf{A}$ е $\mathbf{A}$, а ако $\mathbf{A}$ съдържа квантор, то $\mathbf{A}$ има безброй много варианта. При това всяка формула $\mathbf{A}$ има вариант $\mathbf{A}'$, в който нито една променлива не участва едновременно свободно и свързано. Следващата теорема формализира интуицията, че дадена формула и кой да е неин вариант изказват едно и също.

Теорема 2.15. Нека $\mathcal{F}$ е формална система, $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{F}$ и $\mathbf{A}'$ е вариант на $\mathbf{A}$. Тогава

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$$

Доказателство. Предвид дефиницията на вариант и теоремата за еквивалентната замяна достатъчно е да докажем, че

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists \mathbf{x}\mathbf{B} \leftrightarrow \exists \mathbf{y}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}],$$

където $\mathbf{y}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$. За целта нека $\mathbf{y}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$ и нека означим $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]$ с $\mathbf{B}'$. Да забележим, че свободните участия на $\mathbf{y}$ в $\mathbf{B}'$ са точно свободните участия на $\mathbf{x}$ в $\mathbf{B}$, като това са единствените различия между двете формули. Следователно $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}'_{\mathbf{y}}[\mathbf{x}]$. Тогава

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\mathbf{B} \to \exists \mathbf{y}\mathbf{B}'}\ (\text{АСуб})}{\exists \mathbf{x}\mathbf{B} \to \exists \mathbf{y}\mathbf{B}'}\ (\text{П}\exists) \qquad \dfrac{\overline{\mathbf{B}' \to \exists \mathbf{x}\mathbf{B}}\ (\text{АСуб})}{\exists \mathbf{y}\mathbf{B}' \to \exists \mathbf{x}\mathbf{B}}\ (\text{П}\exists)}{\exists \mathbf{x}\mathbf{B} \leftrightarrow \exists \mathbf{y}\mathbf{B}'}\ (\text{ТТ})$$

□

2.6 Теорема за дедукцията. Теорема за константите

Нека $\mathcal{F}$ е формална система от първи ред и Γ е съвкупност (множество) от формули на $\mathcal{F}$. С $\mathcal{F}[\Gamma]$ ще означаваме формалната система, която се получава от $\mathcal{F}$, добавяйки формулите от Γ като нелогически аксиоми. Ясно е, че всяка формалана система $\mathcal{F}$ има вида $\mathcal{F}_0[\Gamma]$, където $\mathcal{F}_0$ е формалната система с език, съвпадащ с този на $\mathcal{F}$ и без нелогически аксиоми, а Γ е съвкупността на нелогическите аксиоми на $\mathcal{F}$.

Ако Γ се състои от формулите $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, то вместо $\mathcal{F}[\Gamma]$ ще пишем $\mathcal{F}[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n]$.

Теорема 2.16 (За дедукцията)**.** Нека $\mathcal{F}$ е формална система и $\mathbf{A}$ е *затворена* формула на $\mathcal{F}$. Тогава за всяка формула $\mathbf{B}$ на $\mathcal{F}$

$$\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}]} \mathbf{B} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}.$$

Доказателство. Нека първо $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}]} \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, защото всяка аксиоме на $\mathcal{F}$ е аксиома и на $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$. Но $\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}]} \mathbf{A}$ и следователно $\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}]} \mathbf{B}$.

За да докажем обратната посока ще проведем индукция по извода на теоремите в $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$. Нека

$$\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}]} \mathbf{B}.$$

Възможни са следните случаи:

(i) $\mathbf{B}$ е аксиома на $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$, различна от $\mathbf{A}$. Тогава $\mathbf{B}$ е аксиома на $\mathcal{F}$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B}$ и значи $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ съгласно (ТТ).

(ii) $\mathbf{B}$ е аксиомата $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, защото $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ (т.е. $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$) е тавтология.

(iii) $\mathbf{B}$ е тавтологично следствие на $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n$ и $\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}]} \mathbf{B}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Съгласно индукционното предположение

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

При това

$$\mathbf{A} \to \mathbf{B} \text{ е тавтологично следствие на } \mathbf{A} \to \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A} \to \mathbf{B}_n$$

и следователно

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}.$$

(iv) $\mathbf{B} \equiv \exists \mathbf{x}\mathbf{C} \to \mathbf{D}$, където $\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}]} \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{D}$. Съгласно индукционното предположение

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \to \mathbf{C} \to \mathbf{D}.$$

Оттук

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{C} \to \mathbf{A} \to \mathbf{D} \quad (\text{ТТ}).$$

Тъй като $\mathbf{A}$ е затворена, то $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{A} \to \mathbf{D}$, откъдето

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists \mathbf{C} \to \mathbf{A} \to \mathbf{D} \quad (\text{П}\exists).$$

Оттук

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \to \exists \mathbf{x}\mathbf{C} \to \mathbf{D} \quad (\text{ТТ}).$$

□

Прилагайки многоратно теоремата за дедукцията получаваме следното следствие.

Следствие 2.17. Нека $\mathcal{F}$ е формална система и $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ са *затворени* формула на $\mathcal{F}$. Тогава за всяка формула $\mathbf{B}$ на $\mathcal{F}$

$$\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_n]} \mathbf{B} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_1 \to \dots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}.$$

От теоремата за дедукцията следва, че ако $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ са *затворени* формули, то доказуемостта на импликация с предподставки $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ и заключение $\mathbf{B}$ е еквивалентна на валидността на правило с хипотеза $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ и извод $\mathbf{B}$, т.е.

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_1 \to \dots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B} \iff \frac{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n}{\mathbf{B}}\mathcal{F}.$$

Лема 2.18. Нека $\mathcal{F}'$ се получава от $\mathcal{F}$ чрез добавяне на нови константи (нуламестни функционални символи).[1] Нека $\mathbf{A}'$ е формула на $\mathcal{F}'$, чиито нови константи са измежду $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$. Нека $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ са нови променливи (неучастващи в $\mathbf{A}'$ и различни помежду си) и нека $\mathbf{A}$ се получава от $\mathbf{A}'$ чрез заместване на срещанията на $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ съответно с $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$. Тогава

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}' \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$$

Доказателство. Нека първо $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$, защото всяка аксиома на $\mathcal{F}$ е аксиома и на $\mathcal{F}'$. Тъй като $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A}_{\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_n}[\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n]$, то $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}'$ съгласно (ПЗ).

Нека сега $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}'$ и нека $\mathbf{A}'_0, \dots, \mathbf{A}'_k$ е доказателство на $\mathbf{A}'$ в $\mathcal{F}'$. Нека $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n, \mathbf{c}_{n+1}, \dots, \mathbf{c}_m$ са всички нови константи, участващи във формулите $\mathbf{A}'_0, \dots, \mathbf{A}'_k$ и нека $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ са нови променливи (различни дори от $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$). Ако $\mathbf{B}'$ е формула на $\mathcal{F}'$, с $\mathbf{B}^*$ ще означаваме формулата, която се получава замествайки срещанията на $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m$ с $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$. С индукция ще докажем, че $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*_i$ за $0 \leqslant i \leqslant k$. Възможни са следните случаи:

(i) $\mathbf{A}'_i$ е аксиома на $\mathcal{F}'$. Лесно се вижда, че ако $\mathbf{A}'_i$ е съждителна аксиома, аксиома за субституцията или аксиома за равентството, различна от $\mathbf{c}_s = \mathbf{c}_s$ за $1 \leqslant s \leqslant m$, то $\mathbf{A}^*_i$ е съответно съждителна аксиома, аксиома за субституцията или аксиома за равентството на $\mathcal{F}$. Ако $\mathbf{A}'_i$ е аксиомата $\mathbf{c}_s = \mathbf{c}_s$ за някое $1 \leqslant s \leqslant m$, то $\mathbf{A}^*_i$ е $\mathbf{z}_s = \mathbf{z}_s$, което е теорема на $\mathcal{F}$ съгласно теоремата за тъждеството. Накрая, ако $\mathbf{A}'_i$ е нелогическа аксиома, то $\mathbf{A}^*_i$ съвпада с $\mathbf{A}'_i$ и е нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$.

(ii) $\mathbf{A}'_i$ е тавтологично следствие на формулите $\mathbf{A}'_{j_1}, \dots, \mathbf{A}'_{j_l}$ за някои $j_1 < j_2 < \dots < j_l < i$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*_{j_t}$ за $1 \leqslant t \leqslant l$. При това $\mathbf{A}^*_i$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}^*_{j_1}, \dots, \mathbf{A}^*_{j_l}$ и следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*_i$ съгласно (ТТ).

(iii) $\mathbf{A}'_i \equiv \exists \mathbf{x}\mathbf{B}' \to \mathbf{C}'$, като $\mathbf{B}' \to \mathbf{C}' \equiv \mathbf{A}'_j$ за някое $j < i$ и $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{C}'$. Тогава $\mathbf{A}^*_i \equiv \exists \mathbf{x}\mathbf{B}^* \to \mathbf{C}^*$, $\mathbf{A}^*_j \equiv \mathbf{B}^* \to \mathbf{C}^*$, като при това тъй като $\mathbf{x}$ не участва свободноСъгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B}^* \to \mathbf{C}^*$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \exists \mathbf{x}\mathbf{B}^* \to \mathbf{C}^*$ съгласно (П$\exists$).

Следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*$. Но $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^*_{\mathbf{z}_1 \ldots \mathbf{z}_n}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n]$ и следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$, съгласно правилото за замяната.

□

Теорема 2.19 (Теорема за константите)**.** Нека $\mathcal{F}'$ се получава от $\mathcal{F}$ чрез добавяне на нови константи (нуламестни функционални символи). Тогава $\mathcal{F}'$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$. При това, ако $\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_n$ са различни променливи, а $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ са различни нови константи, то

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n].$$

за всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$.

Доказателство. Нека $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{F}$. Нека $\mathbf{y}_1,\ldots, \mathbf{y}_n$ са нови променливи. Тогава съгласно лемата

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n] \iff \vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n].$$

Тъй като $\mathbf{y}_1,\ldots, \mathbf{y}_n$ са нови променливи, то съгласно правилото за замяната

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n],$$

откъдето

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n].$$

□

Нека $\mathbf{A}$ е формула с променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Интуитивно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$ означава да докажем, че произволни $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ имат свойството $\mathbf{A}$. Така теоремата за константите казва, че в рамките на доказателството на формулата $\mathbf{A}$ (т.е. на това, че произволни $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ имат свойството $\mathbf{A}$) символите $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ имат ролята на константи, за които няма нелогически аксиоми.