2.7 Теореми за равенството

Нека първо да отбележим, че всяка формална система съдържа логическата аксиома

$$x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to x_1 = x_2 \to y_1 = y_2.$$

Ще докажем, че равенството е рефликсивна, симетрична и транзитивна релация.

Твърдение 2.20 (Теорема за тъждеството)**.** $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{a}$

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{}{x = x}\;(\text{Акс})}{\mathbf{a} = \mathbf{a}}\;(\text{ПЗ})$$

□

Твърдение 2.21 (Теорема за симетричността)**.** $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{b} \to \mathbf{b} = \mathbf{a}$

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to x_1 = x_2 \to y_1 = y_2}}{\mathbf{a} = \mathbf{b} \to \mathbf{a} = \mathbf{a} \to \mathbf{a} = \mathbf{a} \to \mathbf{b} = \mathbf{a}}\;(\text{ПЗ}) \qquad \dfrac{}{\mathbf{a} = \mathbf{a}}}{\mathbf{a} = \mathbf{b} \to \mathbf{b} = \mathbf{a}}\;(\text{ТТ})$$

□

Твърдение 2.22 (Теорема за транзитивността)**.** $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{b} \to \mathbf{b} = \mathbf{c} \to \mathbf{a} = \mathbf{c}$

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to x_1 = x_2 \to y_1 = y_2}}{\mathbf{a} = \mathbf{a} \to \mathbf{b} = \mathbf{c} \to \mathbf{a} = \mathbf{b} \to \mathbf{a} = \mathbf{c}}\;(\text{ПЗ}) \qquad \dfrac{}{\mathbf{a} = \mathbf{a}}}{\mathbf{a} = \mathbf{b} \to \mathbf{b} = \mathbf{c} \to \mathbf{a} = \mathbf{c}}\;(\text{ТТ})$$

□

Следващата теорема е подобна на теоремата за еквивалентната замяна. Тя казва, че ако два терма са доказуемо равни, то те са взаимно заменяеми.

Теорема 2.23 (Теорема за равенството)**.** Нека $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ и $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$ са термове, такива че $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогава:

- Ако търмът $\mathbf{b}'$ се получава от терма $\mathbf{b}$, замествайки нула, едно, няколко или всички срещания на $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ съответно с $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$, то
$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{b} = \mathbf{b}'.$$
- Ако формулата $\mathbf{A}'$ се получава от формулата $\mathbf{A}$, замествайки нула, едно, няколко или всички срещания на $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ съответно с $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$, то
$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$$

Доказателство. Достатъчно е да докажем теоремата при $n = 1$. За целта, нека $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{a}'$, и $\mathbf{b}'$ и $\mathbf{A}'$ се получават съответно от $\mathbf{b}$ и $\mathbf{A}$ замествайки нула, едно, няколко или всички срещания на $\mathbf{a}$ с $\mathbf{a}'$. Нека първо да забележим, че ако не се извършват никакви замени или $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}'$, то $\mathbf{b} \equiv \mathbf{b}'$ и $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$, и в този случай

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{b} = \mathbf{b}' \text{ и } \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$$

следват съответно от теоремата за тъждеството и теоремата за тавтологиите. За това, нека $\mathbf{a} \not\equiv \mathbf{a}'$, $\mathbf{b} \not\equiv \mathbf{b}'$ и $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{A}'$. Ще докажем, твърденията на теоремата с индукция по построението на $\mathbf{b}$ и $\mathbf{A}$.

Ако $\mathbf{b} \equiv \mathbf{a}$, то тогава $\mathbf{b}' \equiv \mathbf{a}'$ и $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{b} = \mathbf{b}'$ ни е дадено по условие. В противен случай, $\mathbf{b} \equiv \mathbf{f}\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n$ за някой n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ и термове $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$. Тогава всяко срещане на $\mathbf{a}$ в $\mathbf{b}$ е в рамките на някой от термовете $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ и следователно $\mathbf{b}' \equiv \mathbf{f}\mathbf{b}'_1 \dots \mathbf{b}'_n$, където за $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathbf{b}'_i$ се получава от $\mathbf{b}_i$ чрез заместване на $\mathbf{a}$ с $\mathbf{a}'$. Тогава съгласно индукционното предположение за $1 \leqslant i \leqslant n$ имаме

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{b}_i = \mathbf{b}'_i.$$

Оттук

$$\dfrac{\dfrac{\overline{x_1 = y_1 \to \dots \to x_n = y_n \to \mathbf{f}x_1 \dots x_n = \mathbf{f}y_1 \dots y_n}}{\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}'_1 \to \dots \to \mathbf{b}_n = \mathbf{b}'_n \to \mathbf{b} = \mathbf{b}'}\,(\text{ПЗ}) \qquad \overline{\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}'_1} \quad \dots \quad \overline{\mathbf{b}_n = \mathbf{b}'_n}}{\mathbf{b} = \mathbf{b}'}\,(\text{ТТ})$$

т.е.

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{b} = \mathbf{b}'.$$

За $\mathbf{A}$ ще разгледаме четири случая. Нека първо $\mathbf{A} \equiv \mathbf{p}\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n$ за някой n-местен предикатен символ $\mathbf{p}$ и термове $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$. Тогава всяко срещане на $\mathbf{a}$ в $\mathbf{A}$ е в рамките на някой от термовете $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ и следователно $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{p}\mathbf{b}'_1 \dots \mathbf{b}'_n$, където за $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathbf{b}'_i$ се получава от $\mathbf{b}_i$ чрез заместване на $\mathbf{a}$ с $\mathbf{a}'$. Съгласно вече доказаното за термове и теоремата за симетричността, за $1 \leqslant i \leqslant$ имаме

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{b}_i = \mathbf{b}'_i \text{ и } \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{b}'_i = \mathbf{b}_i$$

Оттук

$$\dfrac{\dfrac{\overline{x_1 = y_1 \to \dots \to x_n = y_n \to \mathbf{p}x_1 \dots x_n = \mathbf{p}y_1 \dots y_n}}{\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}'_1 \to \dots \to \mathbf{b}_n = \mathbf{b}'_n \to \mathbf{A} \to \mathbf{A}'}\,(\text{ПЗ}) \qquad \overline{\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}'_1} \quad \dots \quad \overline{\mathbf{b}_n = \mathbf{b}'_n}}{\mathbf{A} \to \mathbf{A}'}\,(\text{ТТ})$$

и

$$\dfrac{\dfrac{\overline{x_1 = y_1 \to \dots \to x_n = y_n \to \mathbf{p}x_1 \dots x_n = \mathbf{p}y_1 \dots y_n}}{\mathbf{b}'_1 = \mathbf{b}_1 \to \dots \to \mathbf{b}'_n = \mathbf{b}_n \to \mathbf{A}' \to \mathbf{A}}\,(\text{ПЗ}) \qquad \overline{\mathbf{b}'_1 = \mathbf{b}_1} \quad \dots \quad \overline{\mathbf{b}'_n = \mathbf{b}_n}}{\mathbf{A}' \to \mathbf{A}}\,(\text{ТТ})$$

откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ съгласно теоремата за тавтологиите.

Нека сега $\mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{B}$. Тогава $\mathbf{A}' \equiv \neg\mathbf{B}'$, където $\mathbf{B}'$ се получава от $\mathbf{B}$ чрез замени на $\mathbf{a}$ с $\mathbf{a}'$. Тогава съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B}'$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ съгласно теоремата за еквивалентната замяна.

Случаите $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ и $\mathbf{A} \equiv \exists \mathbf{x}\mathbf{B}$ се доказват аналогично.

□

Следствие 2.24 (Теорема за равенството)**.**

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}'_1 \to \dots \to \mathbf{a}_n = \mathbf{a}'_n \to \mathbf{b}_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] = \mathbf{b}_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n]$$

Следствие 2.25 (Теорема за равенството)**.**

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}'_1 \to \dots \to \mathbf{a}_n = \mathbf{a}'_n \to (\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \leftrightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n])$$

Следствие 2.26.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}] \leftrightarrow \exists \mathbf{x}(\mathbf{x} = \mathbf{a} \mathbin{\&} \mathbf{A})$$

Пример. Да разгледаме формалната система PA, аксиоматизираща естествените числа. Първичният обект в PA са естествените числа, т.е. променливите и константите интерпретираме като естествени числа, функционалните символи — като операции върху естествени числа, а предикатните символи — като релации върху естествените числа. Когато пишем $\exists x$ или $\forall y$ имаме предвид съответно „съществува (можем да намерим) естествено число“ и „за всяко естествено число“. Функционалните символи на PA са 0, S, $+$ и $.$, като това са първичните операции върху естествени числа, които нямат дефиниции. В PA има един единствен нелогически предикатен символ $<$, която приемаме за първична релация върху естествените числа. За първичните операции и релации са известни, само някои техни основни свойства, които наричаме аксиоми:

N1. $0 \neq Sx$;

N2. $Sx = Sy \to x = y$;

N3. $x + 0 = x$;

N4. $x + Sy = S(x + y)$;

N5. $x.0 = 0$;

N6. $x.Sy = x.y + x$;

N7. $x \nless 0$;

N8. $x < Sy \leftrightarrow (x < y \vee x = y)$;

N9. $x < y \vee x = y \vee y < x$;

СИ. $\mathbf{A_x}[0] \to \forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \to \mathbf{A_x}[S\mathbf{x}]) \to \mathbf{A}$ за всяка формула $\mathbf{A}$ и всяка променлива $\mathbf{x}$.

От схемата за индукцията следва правилото

$$\frac{\mathbf{A}_{\mathbf{x}[0]}, \quad \forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \to \mathbf{A_x}[S\mathbf{x}])}{\mathbf{A}}$$

откъдето благодарение на принципа за обобщението получаваме принципа за индукцията

$$(\text{ПИ})\frac{\mathbf{A}_{\mathbf{x}[0]}, \quad \mathbf{A} \to \mathbf{A_x}[S\mathbf{x}]}{\mathbf{A}}.$$

Да докажем, че събирането е асоциативно, т.е. че $(x + y) + z = x + (y + z)$ за произволни естествени x, y и z. Нека първо направим това неформално. Нека x и y са произволни естесвени числа. Ще докажем твърдението с индукция по z. Имаме

$$(x + y) + 0 \overset{N3}{=} x + y \overset{N3}{=} x + (y + 0)$$

и значи твърдението е в сила, когато z е 0.

Нека сега z е такова, че $(x + y) + z = x + (y + z)$. Тогава

$$(x + y) + Sz \overset{N4}{=} S((x + y) + z) \overset{\text{и.п.}}{=} S(x + (y + z)) \overset{N4}{=} x + S(y + z) \overset{N4}{=} x + (y + Sz),$$

с което индукционната стъпка, а значи и твърдението са доказани.

Да отбележим, че през цялото доказателство x и y са фиксирани естествени числа. Във втората част на доказателството z също е фиксирано естествено число, което обаче не е съвсем произволно, а отговаря на свойството $(x + y) + z = x + (y + z)$. С други думи, във втората част на доказателството за z имаме допълнителна аксиома.

Сега ще направим форамлно доказателство в PA. По същество то е „превод“ на неформалното доказателство, като в него ще има две основни различия. Първо, във формалното доказателство не можем да пренатоварваме значението на някой символ. Така когато са фиксирани (т.е. играят ролята на константи) вместо x, y и z трябва да използваме други символи, например α, β и γ. Второ, в едно формално доказателство не можем да пишем редица от равенства, от вида $(x + y) + 0 = x + y = x + (y + 0)$, а трябва да пишем експлицитно всички двойки равенства, които ни интересуват.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{N3,\ \text{ПЗ}}{(\alpha+\beta)+0=\alpha+\beta} \quad \dfrac{N3,\ \text{ПЗ}}{\beta+0=\beta}}{(\alpha+\beta)+0=\alpha+(\beta+0)}\,\text{(Т=)}}{(x+y)+0=x+(y+0)}\,\text{(ТК)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{N3,\ \text{ПЗ}}{(\alpha+\beta)+S\gamma=S((\alpha+\beta)+\gamma)} \quad \dfrac{\text{Допълнителна аксиома (1)}}{(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)}}{(\alpha+\beta)+S\gamma=S(\alpha+(\beta+\gamma))}\,\text{(Т=)} \quad \dfrac{N3,\ \text{ПЗ}}{\alpha+S(\beta+\gamma)=S(\alpha+(\beta+\gamma))}}{(\alpha+\beta)+S\gamma=\alpha+S(\beta+\gamma)}\,\text{(Т=)} \quad \dfrac{N3,\ \text{ПЗ}}{\beta+S\gamma=S(\beta+\gamma)}}{(\alpha+\beta)+S\gamma=\alpha+(\beta+S\gamma)}\,\text{(Т=)}}{(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)\to(\alpha+\beta)+S\gamma=\alpha+(\beta+S\gamma)}\,-(1),\text{(ТД)}}{(x+y)+z=x+(y+z)\to(x+y)+Sz=x+(y+Sz)}\,\text{(ТК)}}{(x+y)+z=x+(y+z)}\,\text{(ПИ)}$$