Примерни решения на Домашно №1

Задача 1: Представете си игра с един играч (*solitaire*). Дадени са n монети. Номиналите на монетите са без значение. Монетите са наредени вертикално в една купчина. На всеки ход, играчът избира една купчина, имаща повече от една монета, и разбива тази купчина на две произволни непразни купчини. При това получава печалба, равна на произведението от броя на монетите в тези две купчини. Примерно, ако играчът избере купчина с 11 монети и я разбие на една купчина с 6 монети и друга с 5 монети, печалбата е $5 \times 6 = 30$. Играта завършва, когато всяка купчина е с точно една монета. Печалбата в цялата игра е сумата от печалбите от всички разбивания.

Докажете по индукция, че печалбата винаги е $\binom{n}{2}$ **независимо** от това как точно играе играчът.

Решение: Ще докажем твърдението със силна индукция по n. За по-ясно изложение ще записваме биномния коефициент като $\frac{n(n-1)}{2}$.

Базата е $n = 1$. От една страна, играчът няма възможен ход и играта приключва с печалба 0. От друга страна, $\frac{n(n-1)}{2}$ е 0 при $n = 1$. ✓

Индуктивното предположение е следното: за някое цяло положително n е вярно, че за всяко $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ е вярно, че игра, започваща с една купчина от m монети, дава печалба $\frac{m(m-1)}{2}$ независимо от конкретните ходове.

В индуктивната стъпка разглеждаме игра, започваща с една купчина от n монети. Ако $n > 1$, играчът избира някое $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ и с първия си ход разбива купчината на една купчина с m монети и друга с $n - m$ монети. Печалбата от този ход е $m(n - m)$. Но $m < n$ и $n - m < n$, така че прилагаме индуктивното предположение за двете купчини и заключаваме, че печалбите са съответно $\frac{m(m-1)}{2}$ и $\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}$. Тогава сумарната печалба е

$$
\begin{aligned}
& m(n-m) + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{(n-m)(n-m-1)}{2} = \\
& \frac{2mn - 2m^2 + m^2 - m + n^2 - mn - n - mn + m^2 + m}{2} = \\
& \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}
$$

Което и трябваще да докажем. ✓

Задача 2: Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са произволни биекции. Дефинираме две други функции h и t така:

$$\forall x \in \mathbb{R} : h(x) = f(x) + g(x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : t(x) = f(x)g(x)$$

Докажете или опровергайте, че:

10 т. • h е биекция.

10 т. • t е биекция.

Решение: h не е биекция. Като контрапример разглеждаме $f(x) = x$ и $g(x) = -x$. Очевидно това са биекции, но сумата им е константа нула; тоест, $\forall x \in \mathbb{R} : h(x) = 0$. Тази функция не е нито инекция, нито сюрекция, така че не е биекция.

t също не е биекция. Като контрапример разглеждаме $f(x) = x$ и $g(x) = x$. И двете са биекции, но произведението им е $t(x) = x^2$, която не е нито инекция, нито сюрекция, така че не е биекция.

Задача 3: Нека $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -\pi \leq x \leq \pi\}$. Дефинираме релацията $R \subseteq A^2$ така:

$$\forall x, y \in A \left(xRy \;\leftrightarrow\; (x = y) \vee (x \in \{-\pi, \pi\} \wedge y \in \{-\pi, \pi\})\right)$$

10 т. • Докажете, че R е релация на еквивалентност.

10 т. • Нека за всяко $x \in A$ дефинираме множеството T_x така:

$$T_x = \{y \in A \mid xRy\}$$

Нека Z е множеството, дефинирано така

$$Z = \{T_x \mid x \in A\}$$

Отговорете дали Z е крайно, изброимо безкрайно или неизброимо безкрайно. Трябва да обосновете отговорите си добре.

Решение: Ще докажем, че R е релация на еквивалентност. Първо ще докажем, че R е рефлексивна; тоест, че за всяко x в A е изпълнено xRx. Наистина, по дефиниция xRx тстк $x = x$ или $x \in \{-\pi, \pi\} \wedge x \in \{-\pi, \pi\}$ Тъй като съждението $x = x$ е истина за всяко x, дизюнкцията е истина.

Сега ще докажем, че R е симетрична; тоест, че за всеки два различни x, y в A е изпълнено $xRy \rightarrow yRx$. Нека xRy. Ще докажем, че yRx. По дефиниция xRy тстк $x = y$ или $x \in \{-\pi, \pi\} \wedge y \in \{-\pi, \pi\}$. Но $x \neq y$ в текущите допускания. Тогава xRy тстк $x \in \{-\pi, \pi\} \wedge y \in \{-\pi, \pi\}$. Допуснали сме, че xRy. Заключаваме, че $x \in \{-\pi, \pi\} \wedge y \in \{-\pi, \pi\}$. Но конюнкцията е комутативна и имаме право да кажем, че $y \in \{-\pi, \pi\} \wedge x \in \{-\pi, \pi\}$. При положение, че $y \neq x$, това влече yRx. Накратко, xRy влече yRx.

Сега ще докажем, че R е транзитивна. Нека $x, y, z \in A$ са произволни и нека xRy и yRz. Ще докажем, че xRz.

Случай 1: $x \notin \{-\pi, \pi\}$. Тогава конюнкцията $x \in \{-\pi, \pi\} \wedge y \in \{-\pi, \pi\}$ е лъжа. Заключаваме, че $x = y$, инак не би било вярно xRy. Щом $x = y$, това, което трябва да докажем, е yRz. Но yRz е част от допускането.

Случай 2: $x \in \{-\pi, \pi\}$. Ако $x = y$, то това, което трябва да докажем, е, че yRz; но yRz е част от допускането. Остава да разгледаме подслучая $x \neq y$. Това, че $x \neq y$ и xRy и $x \in \{-\pi, \pi\}$ влече, че $y \in \{-\pi, \pi\}$.

Текущите допускания включват yRz, което е същото като $y = z$ или и y, и z са елементи на $\{-\pi, \pi\}$. Първо да допуснем, че $y = z$. Но в текущите допускания имаме $y \in \{-\pi, \pi\}$. Тогава и $z \in \{-\pi, \pi\}$. Тогава $(x \in \{-\pi, \pi\} \wedge z \in \{-\pi, \pi\})$, което влече xRz.

Остава да довършим доказателството при допускането, че $y \neq z$. Но имаме допускане, че yRz. Тогава е вярно, че $(y \in \{-\pi, \pi\} \wedge z \in \{-\pi, \pi\})$. Но в **Случай 2** сме допуснали, че $x \in \{-\pi, \pi\}$. Тогава $(x \in \{-\pi, \pi\} \wedge z \in \{-\pi, \pi\})$, което влече xRz.

T_x е множеството, което на лекции означихме с "$[x]$"; тоест, класът на еквивалентност на R, към който принадлежи x. Пита се дали класовете на еквивалентност на R са крайно множество или безкрайно множество, а ако са безкрайно множество, дали то е изброимо или неизброимо. За да отговорим на въпроса, достатъчно е да разгледаме произволно $x \in A \setminus \{-\pi, \pi\}$. Щом $x \notin \{-\pi, \pi\}$, конюнкцията $(x \in \{-\pi, \pi\} \wedge y \in \{-\pi, \pi\})$ е лъжа за всяко y от A. Тогава, за всяко $y \in A$ е вярно, че xRy тстк $y = x$. Заключаваме, че $T_x = \{x\}$.

Но тогава множеството Z съдържа по един елемент за всяко x от отворения интервал $(-\pi, \pi)$. От лекции знаем, че отвореният интервал $(0, 1)$ е равномощен на $\mathbb{R}$, отворените интервали $(0, 1)$ и $(-\pi, \pi)$ са равномощни, и че $\mathbb{R}$ не е изброимо. Заключаваме, че Z е неизброимо безкрайно множество.

Задача 4: За всяко цяло положително число n дефинираме множеството M_n така:

$$M_n = \{\{a_1, \dots, a_k\}_M \,|\, a_1 + \cdots + a_k = n\}$$

Примерно,

$$M_1 = \big\{\{1\}_M\big\}$$
$$M_5 = \big\{\{5\}_M, \{1,4\}_M, \{2,3\}_M, \{1,1,3\}_M, \{1,2,2\}_M, \{1,1,1,2\}_M, \{1,1,1,1,1\}_M\big\}$$

Дефинираме още $M_{n,o}$ и $M_{n,d}$ така

$$M_{n,o} = \{X \in M_n \,|\, \text{ елементите на } X \text{ са нечетни}\}$$
$$M_{n,d} = \{X \in M_n \,|\, \text{ елементите на } X \text{ са два по два различни}\}$$

Примерно,

$$M_{1,o} = \{\{1\}_M\}$$
$$M_{1,d} = \{\{1\}_M\}$$
$$M_{5,o} = \{\{5\}_M, \{1,1,3\}_M, \{1,1,1,1,1\}_M\}$$
$$M_{5,d} = \{\{5\}_M, \{1,4\}_M, \{2,3\}_M\}$$

Както виждате, $|M_{1,o}| = |M_{1,d}|$ и $|M_{5,o}| = |M_{5,d}|$. Това не е случайно – за всяко цяло положително n е вярно, че $|M_{n,o}| = |M_{n,d}|$. Вашата задача е да намерите и обосновете явна биекция $f : M_{n,o} \to M_{n,d}$.

Упътване: алгоритъмът "взема" мултимножество, чиято сума е n. Ако тези числа са две по две различни, примерно $\{3, 11, 15\}_M$, има ли смисъл да се прави още нещо? Ако има повтарящи се числа, примерно $\{3,3,3,3,3,3,11,11,15\}_M$, представете n като сума от произведения от числата и кратностите им; в този пример $55 = 3 \times 6 + 11 \times 2 + 15 \times 1$. Представете всяка кратност като сума от степени на двойката. Ако отворите скобите, какво получавате?

Решение: Разглеждаме произволно $n \in \mathbb{N}^+$ и произволно мултимножество X с елементи цели положителни числа, такова че сумата на тези числа е n. Въпросната f дефинираме по следния начин. Нека уникалните елементи на X са $b_1, \dots, b_k$. Нека кратността на b_i е m_i, за $1 \leq i \leq k$.

// Очевидно е изпълнено $k \in \{1, \dots, n\}$, $m_i \geq 1$ за $1 \leq i \leq k$ и $\sum_{i=1}^{k} b_i \times m_i = n$.

Добре известен факт е, че всяко цяло положително число се представя по един единствен начин като сума от степените на двойката (това е същото като да се каже, че има уникално представяне в двоична позиционна бройна система). Представяме всяко m_i като сума от степените на двойката. В примера от упътването,

$$55 = 3 \times (2^2 + 2^1) + 11 \times 2^1 + 15 \times 2^0$$

Отваряйки скобите в дясната страна, получаваме сума от числа, които са две по две различни (което обаче трябва да се докаже). В текущия пример,

$$55 = 12 + 6 + 22 + 15$$

Мултимножеството от тези числа (което всъщност е множество, понеже няма повтаряне) е $f(X)$. В текущия пример, $f(\{3,3,3,3,3,3,11,11,15\}_M) = \{6, 12, 15, 22\}_M$.

Забележете, че ако X няма повтарящи се числа, $f(X) = X$, понеже кратностите са единици.

Очевидно f е добре дефинирана функция в смисъл, че изобразява всяко мултимножество $X \in M_{n,o}$ в точно едно мултимножество Y. Ще покажем, че $Y \in M_{n,d}$. Доказателството се основава на елементарния факт, че ако p и q са различни нечетни числа, то $2^u p$ и $2^v q$ са различни числа за всеки $u, v \in \mathbb{N}$. От това следва веднага, че след отварянето на скобите получаваме уникални събираеми.

Сега ще покажем, че f е инекция: по отношение на дадено n, за всеки две мултимножества $X_1, X_2 \in M_{n,o}$, е изпълнено $X_1 \neq X_2 \ \rightarrow \ f(X_1) \neq f(X_2)$. Ще докажем контрапозитивното: $f(X_1) = f(X_2) \ \rightarrow X_1 = X_2$. За целта разглеждаме произволно мултимножество $Y = M_{n,d}$ и доказваме, че за единствено $X \in M_{n,o}$ е вярно, че $f(X) = Y$. Доказателството се основава на елементарния факт, че всяко цяло положително число се представя по уникален начин като произведение от нечетно число (може да е единица) и степен на двойката (която може да е единица). Прилагаме това разсъждение върху елементите на Y, които са два по два различни по конструкция, и заключаваме, че всеки два от тях се представят с по различни начини като произведение от нечетно и точна степен на двойката. Представяме си Y като сума, като елементите на Y са събираемите на тази сума (сборът е точно n, естествено). Ключовото действие е групирането на събираемите с един и същи нечетен множител, който се изважда пред скоби; в скобите се получава сума от степени на двойката, две по две различни. Формално,

$$Y = (2^{a_{1,1}} + \cdots + 2^{a_{1,t_1}})p_1 + \cdots + (2^{a_{k,1}} + \cdots + 2^{a_{k,t_k}})p_k$$

където $p_1, \ldots, p_k$ са различните нечетни множители на елементите на първоначалното Y. Числото t_i е броят на елементите на първоначалното Y, които имат нечетен множител p_i, за $1 \leq i \leq k$. Числата $2^{a_{i,1}}, \ldots, 2^{a_{i,t_i}}$ са различните степени на двойката, които, умножени с p_i, участват като елементи на първоначалното Y, за $1 \leq i \leq k$. Знаейки дефиницията на f, виждаме, че това, което f изобразява в Y, е мултимножеството X с елементи $p_1, \ldots, p_k$, където кратността на p_i е $2^{a_{i,1}} + \cdots + 2^{a_{i,t_i}}$, за $1 \leq i \leq k$. Очевидно елементите на X са нечетни и се сумират до n, така че $X \in M_{n,o}$. Щом образът Y определя напълно първообраза X, функцията f е инекция.

Сега ще докажем, че f е сюрекция: разглеждаме произволно мултимножество $Y = M_{n,d}$ и доказваме, че съществува $X \in M_{n,o}$, такова че $f(X) = Y$. Доказателството използва на практика същите съображения като вече направеното доказателство, че f е инекция. Мултимножеството Y в него беше произволно и ние намерихме неговия първообраз по отношение на f. Ерго, всяко мултимножество от $M_{m,d}$ се явява образ по отношение на f. Ерго, f е сюрекция.