Примерни решения на семестриалното контролно по Дискретни Структури, КН 2 поток, 26.11.2023 г.

Зад. 1 Професор Дълбоков казва, че разполага с доказателство, че ако m и n са естествени числа, то $m = n$. Функцията max се дефинира по класическата дефиниция: за всеки $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\max(m, n) = \begin{cases} m, & \text{ако } m \geqslant n \\ n, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Нека $P(t)$ е следният предикат с домейн $\mathbb{N}$:

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, \big((\max(m, n) = t) \rightarrow (m = n)\big)$$

Професорът доказва $P(t)$ с индукция по t. Базовият случай е $t = 0$ и наистина $P(0)$ е очевидно вярно. Индуктивното предположение е, че $P(t)$ е истина за някакво t. Разглеждаме $P(t+1)$. Нека $\max(m, n) = t + 1$. Нека $m' = m - 1$ и $n' = n - 1$. Но тогава очевидно $\max(m', n') = t$. От това и индуктивното предположение следва, че $m' = n'$. Щом $m' = n'$, в сила е $m = n$. В заключение, $P(t)$ е истина за всяко естествено t.

Какво бихте казали за това доказателство?

Решение: Доказателството е невалидно. $P(0)$ без съмнение е истина, но $P(1)$ не е истина, откъдето индукцията се "чупи".

Проблемът е в индуктивното предположение. Професорът удобно е пропуснал да каже експлицитно кое е множеството X, от което взема стойности t в предположението. Тъй като базата е за стойност на аргумента 0, трябва $0 \in X$. Но вижте как става в индуктивната стъпка, ако $t = 0$.

- Разглеждаме $P(1)$.
- Нека $\max(m, n) = 1$.
- Нека $m' = m - 1$ и $n' = n - 1$. За m и n знаем, че са произволни естествени числа. Нека $m = 0$ и $n = 1$. Тогава $\max(m, n) = 1$. Обаче $m' = 0 - 1$ не е естествено число, така че не може да ползваме индуктивното предположение. Индуктивното предположение е в сила само за естествени m и n. Ерго, не може твърдим, че непременно $m' = n'$. Оттук доказателството дерайлира.

Зад. 2 Нека $\mathsf{R} \subseteq \mathbb{Z}^2$ и $\mathsf{S} \subseteq \mathbb{Z}^2$ са релации, дефинирани по следния начин.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}\,(aRb \;\leftrightarrow\; a - b \text{ е просто число})$$
$$\forall a, b \in \mathbb{Z}\,(aSb \;\leftrightarrow\; a - b \text{ е четно число})$$

Отговорете

10 т. • дали R е релация на еквивалентност и

10 т. • дали S е релация на еквивалентност.

Решение: R не е релация на еквивалентност. Ще докажем, че R не е рефлексивна. Наистина, за всяко цяло число z е вярно, че $\neg aRa$. За да се убедим в това, достатъчно е да съобразим, че $a - a = 0$, а нулата не е просто число.

S обаче е релация на еквивалентност.

- S е рефлексивна. Наистина, за всяко цяло a е вярно, че $a - a$ е четно число, откъдето $\forall a : aSa$.
- S е симетрична. Наистина, за всеки цели различни a и b, ако $a - b$ е четно, то и $b - a$ е четно, така че aRb влече bRa.
- S е транзитивна. Нека a, b и c са цели числа. Ще докажем, че aSb и bSc влече aSc. Допускаме, че aSb и bSc. Тогава, за някои цели m и n,

  $$a - b = 2m$$
  $$b - c = 2n$$

  Тогава

  $$(a - b) + (b - c) = 2(m + n)$$

  Тогава

  $$a - c = 2(m + n)$$

  Но $2(m + n)$ е четно, щом m и n са цели. Тогава разликата $a - c$ е четно число. Заключаваме, че aSc.

Зад. 3 Дадено е непразно множество S. Нека $f : S \to S$ и $g : S \to S$. Тези функции са такива, че

$$\forall x \in S \left(f(x) = g(f(f(x))) \;\wedge\; g(x) = f(g(f(x))) \right)$$

Професор Дълбоков твърди, че $f = g$. Прав ли е професорът?

Решение: Профисорът в случая е прав. Да допуснем противното. Тоест, че $f \neq g$. Това съществува $x \in S$, такова че $f(x) \neq g(x)$.

$$\begin{aligned}
f(x) \neq g(x) \;&\leftrightarrow \qquad // \text{ понеже } f(x) = g(f(f(x))) \\
\underbrace{g}_{fgf}(f(f(x))) \neq g(x) \;&\leftrightarrow \qquad // \text{ понеже } g(Y) = f(g(f(Y))) \\
f(\underbrace{g(f(f}_{f}(f(x))))) \neq g(x) \;&\leftrightarrow \qquad // \text{ понеже } g(f(f(Y))) = f(Y) \\
f(f(\underbrace{f}_{gff}(x))) \neq g(x) \;&\leftrightarrow \qquad // \text{ понеже } f(x) = g(f(f(x))) \\
f(\underbrace{f(g(f}_{g}(f(x))))) \neq g(x) \;&\leftrightarrow \qquad // \text{ понеже } f(g(f(Y))) = g(Y) \\
f(g(f(x))) \neq g(x) \;&\leftrightarrow \qquad // \text{ понеже } f(g(f(x))) = g(x) \\
g(x) \neq g(x) \;& \qquad // \text{ противоречие!}
\end{aligned}$$

Противоречието, до което достигнахме, влече, че допускането е невярно. Тогава $f = g$.

Зад. 4 Нека $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. За всяко $n \in \mathbb{N}$, нека a_n е броят на редиците с дължина n, чиито елементи са от S и които нямат съседни четни числа.

10 т. • Съставете рекурентно уравнение за a_n.

10 т. • Решете уравнението.

Решение: Очевидно $a_0 = 1$ и $a_1 = 7$. Разсъждаваме за a_n, ако $n \geqslant 2$. S съдържа три нечетни и четири четни числа. Ако редица с дължина n започва с нечетно число, това не налага никакви допълнителни ограничения за подредицата от втория елемент нататък (освен да няма съседни четни). Ако обаче започва с четно число, следващото задължително е нечетно, а за подредицата от третия елемент нататък няма допълнителни ограничения (освен да няма съседни четни). Поради това можем да мислим, че има $3 \times 4 = 12$ възможни начала с дължина две на редица, започваща с четно число. Да обобщим

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0 \\ 7, & \text{ако } n = 1 \\ 3a_{n-1} + 12a_{n-2}, & \text{ако } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Да решим уравнението. Характеристичното уравнение е $x^2 - 3x - 12 = 0$. Мултимножеството от корените е $\left\{\frac{3+\sqrt{57}}{2}, \frac{3-\sqrt{57}}{2}\right\}_M$. Общото решение е

$$a_n = A\left(\frac{3+\sqrt{57}}{2}\right)^n + B\left(\frac{3-\sqrt{57}}{2}\right)^n$$

за някакви константи A и B, които ще намерим от началните условия.

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 = A + B \\ 7 &= a_1 = A\left(\frac{3+\sqrt{57}}{2}\right) + B\left(\frac{3-\sqrt{57}}{2}\right) \end{aligned}$$

И така,

$$\begin{aligned} 1 &= A + B \\ 7 &= A\left(\frac{3+\sqrt{57}}{2}\right) + B\left(\frac{3-\sqrt{57}}{2}\right) \end{aligned}$$

Решението е

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{57}+11}{2\sqrt{57}} \\ B &= \frac{\sqrt{57}-11}{2\sqrt{57}} \end{aligned}$$

И така,

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{57}+11}{2\sqrt{57}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{57}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{57}-11}{2\sqrt{57}}\right)\left(\frac{3-\sqrt{57}}{2}\right)^n$$

Зад. 5 Нека D_n е броят на пермутациите на елементите на $\{1, 2, \ldots, n\}$, в които нито един елемент не си е на мястото. Забележете, че $D_0 = 1$, защото за празната пермутация е вярно, че нито един елемент не си е на мястото. От друга страна, $D_1 = 0$, защото има една единствена пермутация на елементите на $\{1\}$ и в нея има елемент—а именно, единствената единица—който си е на мястото. Докажете с комбинаторни разсъждения, че за всяко $n \geqslant 2$ е вярно, че $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.

Бонус 15 точки: Докажете, че същата рекурентна зависимост е в сила и за факториела. Но очевидно $D_n < n!$ за всички достатъчно големи стойности на n, понеже $n!$ брои пермутациите без ограничения, които са повече от тези, в които нито един елемент не си е на мястото. Как обяснявате това, че хем $D_n < n!$, хем и двете удовлетворяват същата рекурентна зависимост?

Решение: На лекции нарекохме тези пермутации "деранжименти". Да разгледаме кой да е деранжимент с дължина n, където $n \geqslant 2$. Да разгледаме първата позиция. На нея може да е всяко от числата 2, 3, ..., n. Има точни $n-1$ възможности за първото число. Да кажем, че на първа позиция числото е k; както видяхме, $k \in \{2, \ldots, n\}$.

Сега гледаме позиция k. Има две възможности, изчерпателни и взаимно изключващи се.

- На позиция k стои числото 1. Имаме число k на първа позиция, число 1 на k-та позиция, а на останалите позиции нито едно от числата от $\{1, \ldots, n\} \setminus \{1, k\}$ не си е на мястото. Броят на начините да бъдат сложени числата от $\{1, \ldots, n\} \setminus \{1, k\}$ на позиции без първата и k-тата по такъв начин, че нито едно число да не си е на мястото, е D_{n-2}.

- На позиция k стои число, което не е 1. Имаме число k на първа позиция, а на останалите позиции нито едно от числата от $\{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ не си е на мястото. Броят на начините да бъдат сложени числата от $\{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ на позиции без първата по такъв начин, че нито едно число да не си е на мястото, е D_{n-1}.

Очевидно деранжиментите с число k на първа позиция се разбиват на тези, които имат 1 на позиция k, и тези, които имат нещо друго на позиция k. По принципа на разбиването, броят на възможностите е $D_{n-1} + D_{n-2}$. Това е за фиксирано k на първа позиция. Ако сумираме по всички $n-1$ възможни първи елементи, получаваме $(n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$. Това е броят на деранжиментите.

Що се отнася до бонуса, иска се да покажем, че

$$n! = (n-1)((n-1)! + (n-2)!)$$

за $n \geqslant 2$. Но това е тривиално предвид факта, че $n! = n(n-1)(n-2)!$ и $(n-1)! = (n-1)(n-2)!$. Равенството, което трябва да докажем, е

$$n(n-1)(n-2)! = (n-1)(n-1)(n-2)! + (n-1)(n-2)!$$

Предвид факта, че $(n-2)! \geqslant 1$, това е същото като

$$n(n-1) = (n-1)^2 + (n-1) \; \leftrightarrow \; n^2 - n = n^2 - 2n + 1 + n - 1$$

което е очевидно вярно. И така, броят на деранжиментите и факториелът удовлетворяват една и съща рекурентна зависимост при $n \geqslant 2$.

Причината D_n да расте по-бавно е само една: началните условия са различни. $D_0 = 1$ и $D_1 = 0$, докато $0! = 1$ и $1! = 1$. Разликата между D_1 и $1!$ е причината за разликата между $D_2 = 1$ и $2! = 2$, която на свой ред води разликата между $D_3 = 2$ и $3! = 6$, която на свой ред води до разликата между $D_4 = 9$ и $4! = 24$, и така нататък. Както видяхме на лекции, D_n е, грубо казано, e пъти по-малко от $n!$ при големите стойности на n, и това се дължи на нищожната разлика между D_1 и $1!$.

Зад. 6 Нека k, m и n са естествени числа, такива че $k \leqslant m \leqslant n$. Докажете с комбинаторни съображения тъждеството

$$\binom{n-k}{m-k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n-i}{m}$$

Решение: Лявата страна брои m-елементните подмножества на $\{1, 2, \ldots, n\}$, всяко от които съдържа всички числа 1, 2, ..., k; щом съдържа всяко от 1, 2, ..., k, то всяко такова m-елементно подмножество се определя напълно от това, кои $m - k$ на брой елемента на $\{k+1, k+2, \ldots, n\}$ съдържа. Но $|\{k+1, k+2, \ldots, n\}| = n - k$. Следователно, броят на m-елементните подмножества на $\{1, 2, \ldots, n\}$, всяко от които съдържа числата 1, 2, ..., k, е $\binom{n-k}{m-k}$.

Дясната страна брои същото множество, но подробно и съгласно принципа на включването и изключването. Универсумът е множеството от всички m-елементни подмножества на $\{1, 2, \ldots, n\}$ без ограничения. Очевидно мощността на универсума е $\binom{n}{m}$.

Да разгледаме m-елементните подмножества на $\{1, 2, \ldots, n\}$, които не съдържат елемента 1. Очевидно те са $\binom{n-1}{m}$ на брой. Всички тези подмножества са "нарушители" по отношение на изискването да се съдържат числата 1, 2, ..., k. Нещо повече, несъдържането на кое да е от 1, 2, ..., k представлява "нарушение", така че общият брой на подмножествата-нарушители, несъдържащи поне един елемент от $\{1, 2, \ldots, k\}$, е $k\binom{n-1}{m}$.

Но отговорът не може да е $\binom{n}{m} - k\binom{n-1}{m}$, защото тук сме извадили прекалено много. Разглеждаме m-елементните подмножества на $\{1, 2, \ldots, n\}$, всяко от които не съдържа поне две числа различни измежду 1, 2, ..., k. Има $\binom{k}{2}$ начина да изберем тези различни числа, откъдето броят на тези подмножества е $\binom{k}{2}\binom{n-2}{m}$. Дотук имаме

$$\binom{n}{m} - k\binom{n-1}{m} + \binom{k}{2}\binom{n-2}{m}$$

Продължаваме съгласно принципа на включването и изключването. Следващото събираемо е $-\binom{k}{3}\binom{n-3}{m}$, след това е $+\binom{k}{4}\binom{n-4}{m}$, и така нататък. Цялата сума с алтерниращи знаци може да запишем като

$$(-1)^0\binom{k}{0}\binom{n-0}{m} + (-1)^1\binom{k}{1}\binom{n-1}{m} + (-1)^2\binom{k}{2}\binom{n-2}{m} + (-1)^3\binom{k}{3}\binom{n-3}{m} + \cdots + (-1)^k\binom{k}{k}\binom{n-k}{m}$$

Накратко,

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n-i}{m}$$

Доказахме тъждеството: лявата и дясната страна броят едно и също множество.