2.17 Примери за употреба на теоремата на Ербран

Пример 1. Да разгледаме формулата
$$\forall x \exists y (x < y) \to \forall y \exists x (y < x) \tag{1}$$
Съгласно теоремата за варианта формула (1) е теорема на всяка формална система. Сега ще видим, как можем да се убедим в това, че (1) е теорема въз основа на теоремата на Ербран.

Формула (1) е еквивалентна на формулата
$$\exists x \forall y \forall y' \exists x' (x < y \to y' < x'). \tag{2}$$
Ербранизацията на формула (2) (т.е. $\mathbf{A}_H$ при положение, че $\mathbf{A}$ е формула (2)) е формулата
$$\exists x \exists x' (x < \phi x \to \psi x < x'), \tag{3}$$
където ϕ и ψ са нови едноместни функционални символи. Матрицата на формула (3) е формулата
$$x < \phi x \to \psi x < x'. \tag{4}$$
Формулите
$$x < \phi x \to \psi x < \phi \psi x \text{ и } \psi x < \phi \psi x \to \psi \psi x < x'$$
са частни случаи на формула (4) и значи формулата
$$(x < \phi x \to \psi x < \phi \psi x) \vee (\psi x < \phi \psi x \to \psi \psi x < x') \tag{5}$$
е дизюнкция на частни случаи на матрицата на формула (3). От друга страна формула (5) е формула от вида $(\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \vee (\mathbf{C} \to \mathbf{D})$, която е тавтология за всеки избор на формули $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$. Следователно (5) е тавтология, откъдето съгласно теоремата на Ербран формула (2) е теорема и значи и формула (1) е теорема.

Пример 2. Да разгледаме формулата
$$\forall x (x \nless x) \to \forall x \forall y \forall z (x < y \to y < z \to x < z) \to (x < y \vee x = y) \to (y < x \vee y = x) \to x = y. \tag{6}$$
Тя казва, че ако $<$ е строга частична наредба, то $\leqslant$ е антисиметрична релация, което е добре позната връзка между строгата и нестрога частична наредба. Ще видим, как можем да се убедим, че формула (6) е теорема, използвайки теоремата на Ербран. Съгласно теоремата за универсалното затваряне формула (6) е теорема тогава и само тогава, когато формулата
$$\forall x \forall y (\forall x (x \nless x) \to \forall x \forall y \forall z (x < y \to y < z \to x < z) \to (x < y \vee x = y) \to (y < x \vee y = x) \to x = y) \tag{7}$$
е теорема. Тази формула е еквивалентна на пренексната формула
$$\forall x \forall y \exists x' \exists x'' \exists y'' \exists z'' (x' \nless x' \to (x'' < y'' \to y'' < z'' \to x'' < z'') \to (x < y \vee x = y) \to (y < x \vee y = x) \to x = y), \tag{8}$$
чиято ербранизация е форумалата
$$\exists x' \exists x'' \exists y'' \exists z'' (x' \nless x' \to (x'' < y'' \to y'' < z'' \to x'' < z'') \to (\alpha < \beta \vee \alpha = \beta) \to (\beta < \alpha \vee \beta = \alpha) \to \alpha = \beta), \tag{9}$$
където α и β са нови константи. Да разгледаме частния случай
$$\alpha \nless \alpha \to (\alpha < \beta \to \beta < \alpha \to \alpha < \alpha) \to (\alpha < \beta \vee \alpha = \beta) \to (\beta < \alpha \vee \beta = \alpha) \to \alpha = \beta \tag{10}$$
на матрицата на формула (9). Формулата
$$\alpha \nless \alpha \to (\alpha < \beta \to \beta < \alpha \to \alpha < \alpha) \to (\alpha < \beta \vee \alpha = \beta) \to (\beta < \alpha \vee \beta = \alpha) \to (\alpha = \beta \vee \beta = \alpha) \tag{11}$$
е тавтология, тъй като $(\alpha \nless \beta \vee \beta \nless \alpha)$ е тавтологично следствие на формулите $\alpha \nless \alpha$ и $(\alpha < \beta \to \beta < \alpha \to \alpha < \alpha)$, а $(\alpha = \beta \vee \beta = \alpha)$ е тавтологично следствие на формулите $(\alpha \nless \beta \vee \beta \nless \alpha)$, $(\alpha < \beta \vee \alpha = \beta)$ и $(\beta < \alpha \vee \beta = \alpha)$.

Формулата
$$\beta = \alpha \to \alpha = \beta \tag{12}$$
е тавтологично следствие на формулите
$$\beta = \beta,$$
която е частен случай на аксиомата за равенството $x = x$, и формулата
$$\beta = \alpha \to \beta = \beta \to \beta = \beta \to \alpha = \beta,$$

която е частен случай на аксиомата за равенството $x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to x_1 = x_2 \to y_1 = y_2$, и значи формула (12) е тавтологично следствие на частни случаи на аксиоми за равнеството.

От друга страна

$$\alpha = \beta$$

е тавтологично следствие на формула (12) и формулата $(\alpha = \beta \vee \beta = \alpha)$ и следователно формула (10) е тавтологично следствие на частни случаи на аксиоми за равенството. Оттук и теоремата на Ербран формула (8) е теорема и значи и формула (6) също е теорема.

Забележка. Горната аргументация на това, че формула (6) е теорема, е твърде далеч от „естественото“ доказателство. Наистина, за да докажем, че антисиметричността на релацията „по-малко или равно“ следва от това, че релацията „по-малко“ е строга наредба, разсъждаваме обичайно по следния начин.

Нека $<$ е строга наредба, т.е. $\forall x(x \not< x)$ и $\forall x\forall y\forall z(x < y \to y < z \to x < z)$ и нека $x < y \vee x = y$ и $y < x \vee y = x$. От ирефлексивността и транзитивността на $<$ (т.е. от $\forall x(x \not< x)$ и $\forall x\forall y\forall z(x < y \to y < z \to x < z)$) следва, че $x \not< y \vee y \not< x$. Оттук, $x < y \vee x = y$ и $y < x \vee y = x$ получаваме $x = y \vee y = x$ и значи $x = y$.

Това разсъждение съответсва директно на следния формален извод

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\text{Допълнителна аксиома (*)}}{\forall x(x \not< x)}}{\alpha \not< \alpha}\,{\scriptstyle(\text{ТЗ}),(\text{ТТ})}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\text{Допълнителна аксиома (**)}}{\forall x\forall y\forall z(x < y \to y < z \to x < z)}}{\alpha < \beta \to \beta < \alpha \to \alpha < \alpha}\,{\scriptstyle(\text{ТЗ}),(\text{ТТ})}
}{\alpha \not< \beta \vee \beta \not< \alpha}\,{\scriptstyle(\text{ТТ})}
\qquad
\dfrac{\text{Допълнителна аксиома (***)}}{\alpha < \beta \vee \alpha = \beta}
\qquad
\dfrac{\text{Допълнителна аксиома (****)}}{\beta < \alpha \vee \beta = \alpha}
}{\dfrac{\alpha = \beta \vee \beta = \alpha}{\alpha = \beta}\,{\scriptstyle(\text{Т}=),(\text{ТТ})}}\,{\scriptstyle(\text{ТТ})}
}{\dfrac{\forall x(x \not< x) \to \forall x\forall y\forall z(x < y \to y < z \to x < z) \to (\alpha < \beta \vee \alpha = \beta) \to (\beta < \alpha \vee \beta = \alpha) \to \alpha = \beta}{\forall x(x \not< x) \to \forall x\forall y\forall z(x < y \to y < z \to x < z) \to (x' < y' \vee x' = y') \to (y' < x' \vee y' = x') \to x' = y'}\,{\scriptstyle(\text{ТК})}}\,{\scriptstyle\text{-(*),(**),(***),(****),(ТД)}}
}{(6)}\,{\scriptstyle(\text{ПЗ})}
$$