2.18 Разширения с помощта на дефиниция на функционален символ

Теорема 2.46. Нека $\mathbf{A}$ е формула на формалната система $\mathcal{F}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}$, такава че $\vdash_{\mathcal{F}} \exists \mathbf{y}\mathbf{A}$. Нека $\mathcal{F}'$ се получава от $\mathcal{F}$, добавяйки нов функционален символ $\mathbf{f}$ и нелогическа аксиома $\mathbf{A}_{\mathbf{y}}[\mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n]$. Тогава $\mathcal{F}'$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$.

Доказателство. Предвид теоремата за универсалното затваряне, достатъчно е да докажем, че ако една затворена формула на $\mathcal{F}$, която е теорема на $\mathcal{F}'$, е теорема на $\mathcal{F}$. Нека $\mathbf{B}$ е затворена формула на $\mathcal{F}$, която е теорема на $\mathcal{F}'$, да означим с $\mathcal{F}_0$ формалната система с език $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ и без нелогически аксиоми, а с $\mathcal{F}'_0$ — формалната система с език $\mathcal{L}(\mathcal{F}')$ и без нелогически аксиоми. Тогава предвид теоремата за редукцията

$$\vdash_{\mathcal{F}'_0} \forall \mathbf{x}_1 \ldots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A}_{\mathbf{y}}[\mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \to \mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_k \to \mathbf{B}, \qquad (*)$$

където $\mathbf{C}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, са универсални затваряния на аксиоми на $\mathcal{F}$. Нека $\mathbf{C}$ е пренексна форма на $\mathbf{A} \to \mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_k \to \mathbf{B}$. Тогава $\exists \mathbf{x}_1 \ldots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{C}_{\mathbf{y}}[\mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n]$ е пренексна форма на $(*)$ и значи е теорема на $\mathcal{F}'_0$.

Нека $\mathbf{D} \equiv \exists \mathbf{x}_1 \ldots \exists \mathbf{x}_n \forall \mathbf{y} \mathbf{C}$. Тогава за да образуваме $\mathbf{D}^{\#}$ можем да използваме отново символа $\mathbf{f}$, т.е. $\mathbf{D}^{\#} \equiv \exists \mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \mathbf{C}_{\mathbf{y}}[\mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n]$ и следователно $\vdash_{\mathcal{F}'_0} \mathbf{D}^{\#}$. От друга страна ${\mathbf{D}^{\#}}_H \equiv \mathbf{D}_H$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}_0} \mathbf{D}$. Оттук

$$\vdash_{\mathcal{F}_0} \forall \mathbf{x}_1 \ldots \forall \mathbf{x}_n \exists \mathbf{y}\mathbf{A} \to \mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_k \to \mathbf{B}$$

и следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B}$.

□

Нека $\mathcal{F}$ е формална система и нека $\mathbf{D}$ е формула със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}$, такава че

$$\begin{array}{ll} \vdash_{\mathcal{F}} & \exists \mathbf{y}\mathbf{D} \\ \vdash_{\mathcal{F}} & (\mathbf{D} \mathbin{\&} \mathbf{D}_{\mathbf{y}}[\mathbf{y}']) \to \mathbf{y} = \mathbf{y}'. \end{array}$$

Нека $\mathcal{F}'$ се получава от $\mathcal{F}$, добавяйки нов n-местен функционален $\mathbf{f}$ и дефинираща аксиома

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{D}.$$

За всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}'$ дефинираме превода $\mathbf{A}^*$ на $\mathbf{A}$ в $\mathcal{F}$ чрез следната рекурсия: Нека първо $\mathbf{A}$ е атомарна. Ако $\mathbf{A}$ не съдържа $\mathbf{f}$, то $\mathbf{A}^* \equiv \mathbf{A}$. Ако $\mathbf{A}$ съдържа $\mathbf{f}$, то $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}_{\mathbf{z}}[\mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n]$, за подходяща формула $\mathbf{B}$, променлива $\mathbf{z}$ и термове $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, несъдържащи $\mathbf{f}$. В този случай $\mathbf{B}$ съдържа по-малко срещания на $\mathbf{f}$ от $\mathbf{A}$ и тогава, полагаме

$$\mathbf{A}^* \equiv \exists \mathbf{z}(\mathbf{D}'_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \mathbf{y}}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{z}] \mathbin{\&} \mathbf{B}^*),$$

където $\mathbf{D}'$ е вариант на $\mathbf{D}$, в който свързаните променливи са различни от променливите на $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.[6] Накрая, ако $\mathbf{A}$ не е атомарна, то $\mathbf{A}^*$ се получава, замествайки всичките ѝ атомарни подформули със съответните им преводи.

Теорема 2.47. В сила са следните:

(i) $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}^*$;

(ii) $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*$.

[6] Нека например разширим PA едноместния функционален символ $\left[\frac{\cdot}{2}\right]$ с дефинираща аксиома $\left[\frac{x}{2}\right] = y \leftrightarrow (x = y.SS0 \vee x = y.SS0 + S0)$ (в сила е $\vdash_{PA} \exists y(x = y.SS0 \vee x = y.SS0 + S0)$ и $\vdash_{PA} (((x = y.SS0 \vee x = y.SS0 + S0) \mathbin{\&} (x = y'.SS0 \vee x = y'.SS0 + S0)) \to y = y')$. Нека $\mathbf{A}$ е формулата $\left[\frac{\left[\frac{x+z}{2}\right]+y}{2}\right] = 0$. Тогава формулата $\mathbf{B}$ например е $\left[\frac{z'+y}{2}\right] = 0$, като $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}_{z'}[\left[\frac{x+z}{2}\right]]$. Нека $\mathbf{C}$ е формулата $z'' = 0$. Тогава $\mathbf{B} \equiv \mathbf{C}_{z''}[\left[\frac{z'+y}{2}\right]]$. Тъй като $\mathbf{C}$ не съдържа новия функционален символ, имаме $\mathbf{C}^* \equiv \mathbf{C}$, откъдето

$$\mathbf{B}^* \equiv \exists z''((z' + y = z''.SS0 \vee z' + y = z''.SS0 + S0) \mathbin{\&} z'' = 0)$$

и

$$A^* \equiv \exists z'((x + z = z'.SS0 \vee x + z = z'.SS0 + S0) \mathbin{\&} z''((z' + y = z''.SS0 \vee z' + y = z''.SS0 + S0) \mathbin{\&} z'' = 0))$$

Доказателство. За (i) достатъчно е да докажем твърдението за атомарна $\mathbf{A}$. Ще проведем индукция по броя на срещанията на $\mathbf{f}$ в $\mathbf{A}$. Ако такива срещания няма, то твърдението е тривиално. Нека сега в $\mathbf{A}$ има срещане на $\mathbf{f}$. От дефиниращата аксиома, теоремата за варианта и правилото за замяната имаме

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{z} = \mathbf{fa}_1 \ldots \mathbf{a}_n \leftrightarrow \mathbf{D}'_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \mathbf{y}}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{z}]$$

и значи, съгласно теоремата за еквивалентната замяна

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^* \leftrightarrow \exists \mathbf{z}(\mathbf{z} = \mathbf{fa}_1 \ldots \mathbf{a}_n \,\&\mathbf{B}^*).$$

Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B}^*$, откъдето

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^* \leftrightarrow \exists \mathbf{z}(\mathbf{z} = \mathbf{fa}_1 \ldots \mathbf{a}_n \,\&\mathbf{B}).$$

Оттук, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B_z}[\mathbf{fa}_1 \ldots \mathbf{a}_n]$ и следствието на теоремата за равенството ($\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B_z}[\mathbf{fa}_1 \ldots \mathbf{a}_n] \leftrightarrow \exists \mathbf{z}(\mathbf{z} = \mathbf{fa}_1 \ldots \mathbf{a}_n \,\&\mathbf{B})$) получаваме

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^* \leftrightarrow \mathbf{A}.$$

За (ii) достатъчно е да докажем (предвид (i)), че $\mathcal{F}'$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$. За целта да разгледаме формалната система $\mathcal{F}''$, която се получава от $\mathcal{F}$, добавяйки символа $\mathbf{f}$ и аксиомата $\mathbf{A_y}[\mathbf{fx}_1 \ldots \mathbf{x}_n]$. От условието $\vdash_{\mathcal{F}} \exists \mathbf{yD}$ и следователно, съгласно предната теорема, $\mathcal{F}''$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$. Следователно за да докажем (ii) достатъчно е да покажем, че $\mathcal{F}''$ е разширение на $\mathcal{F}'$, т.е. че определящата аксиома $\mathbf{y} = \mathbf{fx}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{D}$ на $\mathbf{f}$ в $\mathcal{F}'$ е теорема на $\mathcal{F}''$. От теоремата за равенството имаме

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{y} = \mathbf{fx}_1 \ldots \mathbf{x}_n \to (\mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{D_y}[\mathbf{fx}_1 \ldots \mathbf{x}_n]).$$

Оттук, аксиомата $\mathbf{D_y}[\mathbf{fx}_1 \ldots \mathbf{x}_n]$ и теоремата за тавтологиите получаваме

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{y} = \mathbf{fx}_1 \ldots \mathbf{x}_n \to \mathbf{D}.$$

От друга страна, съгласно условието за $\mathbf{D}$ и правилото за замяната

$$\vdash_{\mathcal{F}'} (\mathbf{D} \,\&\, \mathbf{D_y}[\mathbf{fx}_1 \ldots \mathbf{x}_n]) \to \mathbf{y} = \mathbf{fx}_1 \ldots \mathbf{x}_n.$$

Оттук, аксиомата $\mathbf{D_y}[\mathbf{fx}_1 \ldots \mathbf{x}_n]$ и теоремата за тавтологиите получаваме

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{D} \to \mathbf{y} = \mathbf{fx}_1 \ldots \mathbf{x}_n.$$

$\square$

Забележка. Ако $\mathbf{a}$ е терм на $\mathcal{F}$ с променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, то от теоремата за субституцията

$$\exists \mathbf{y}(\mathbf{y} = \mathbf{a}),$$

а от симетричността и транзитивността на равенството

$$(\mathbf{y} = \mathbf{a} \,\&\, \mathbf{y}' = \mathbf{a}) \to \mathbf{y} = \mathbf{y}'.$$

Следователно можем да въведем нов n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ с дефинираща аксиома

$$\mathbf{fx}_1 \ldots \mathbf{x}_n = \mathbf{a}.$$