2.19 Системата ZF

Формалната система ZF има един единствен нелогически символ $\in$ — двуместен предикатен.

ZF 1. (Аксиома за обемност)

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y.$$

От теоремата за равенството имаме

$$\vdash x = y \to \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$$

и следователно

$$\vdash_{ZF} x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y). \tag{13}$$

Интуитивно, две множества съвпадат тогава и само тогава, когато имат едни и същи елементи.

Забележка 1. Нека за произволна формула $\mathbf{A}$ с $\mathbf{D}^{\mathbf{A}}$ означим формулата

$$\mathbf{D}^{\mathbf{A}} \equiv \forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A}),$$

където $\mathbf{y}$ не участва свободно в $\mathbf{A}$. Имаме

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\mathbf{D}^{\mathbf{A}} \to (\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A})}\,(\text{Т.Суб.}) \qquad \cfrac{}{\mathbf{D}^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{y}}[\mathbf{y}'] \to (\mathbf{z} \in \mathbf{y}' \leftrightarrow \mathbf{A})}\,(\text{Т.Суб.})}{(\mathbf{D}^{\mathbf{A}} \,\&\, \mathbf{D}^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{y}}[\mathbf{y}']) \to (\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{z} \in \mathbf{y}')}\,(\text{ТТ})}{(\mathbf{D}^{\mathbf{A}} \,\&\, \mathbf{D}^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{y}}[\mathbf{y}']) \to \forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{z} \in \mathbf{y}')}\,(\text{П}\forall)}{(\mathbf{D}^{\mathbf{A}} \,\&\, \mathbf{D}^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{y}}[\mathbf{y}']) \to \mathbf{y} = \mathbf{y}'}\,(\text{ZF1}),\ (\text{ПЗ}),\ (\text{ТТ})$$

и следователно, ако $\vdash_{ZF} \exists \mathbf{y}\mathbf{D}^{\mathbf{A}}$, то можем да въведем функционален символ $\mathbf{f}$, чрез дефинираща аксиома $\mathbf{y} = \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A})$, където свободните променливи на $\mathbf{A}$ са измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{z}$.

Добавяме нов двуместен предикатен символ $\subseteq$ с дефинираща аксиома

$$x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \to z \in y).$$

За произволни формули $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имаме, че

$$\forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B}) \leftrightarrow (\forall \mathbf{x}\mathbf{A} \,\&\, \forall \mathbf{x}\mathbf{B})$$

е теорема на всяка формална система. В частност

$$\vdash_{ZF} \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow (\forall z(z \in x \to z \in y) \,\&\, \forall z(z \in y \to z \in x)).$$

Оттук, дефиниращата аксиома на $\subseteq$, (13) и теоремата за еквивалентната замяна получаваме

$$\vdash_{ZF} x = y \leftrightarrow (x \subseteq y \,\&\, y \subseteq x).$$

ZF 2. (Схема за отделянето (обхващането))

$$\exists \mathbf{y}\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow (\mathbf{z} \in \mathbf{x} \,\&\, \mathbf{A})),\ \ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \text{ са различни.}$$

Забележка 2. Нека свободните променливи на $\mathbf{A}$ са измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{z}$. Нека $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ са различни константи и $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Тогава

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\exists \mathbf{y}\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow (\mathbf{z} \in \alpha \,\&\, \mathbf{A}'))}\,(\text{ZF 2}),\ (\text{ПЗ}) \qquad \cfrac{\cfrac{(*)\ \forall \mathbf{z}(\mathbf{A}' \to \mathbf{z} \in \alpha)}{\mathbf{A}' \to \mathbf{z} \in \alpha}\,(\text{Т.Суб.}),\ (\text{ТТ})}{(\mathbf{z} \in \alpha \,\&\, \mathbf{A}') \leftrightarrow \mathbf{A}'}\,(\text{ТТ})}{\exists \mathbf{y}\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A}')}\,(\text{ТЕЗ})}{\forall \mathbf{z}(\mathbf{A}' \to \mathbf{z} \in \alpha) \to \exists \mathbf{y}\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A}')}\,(\text{ТД}),\ (*)}{\forall \mathbf{z}(\mathbf{A} \to \mathbf{z} \in \mathbf{x}) \to \exists \mathbf{y}\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A})}\,(\text{ТК})}{\exists \mathbf{x}\forall \mathbf{z}(\mathbf{A} \to \mathbf{z} \in \mathbf{x}) \to \exists \mathbf{y}\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A})}\,(\text{П}\exists)$$

Тогава, при означенията от предната забележка, имаме

$$\vdash_{ZF} \exists \mathbf{x}\forall \mathbf{z}(\mathbf{A} \to \mathbf{z} \in \mathbf{x}) \to \exists \mathbf{y}\mathbf{D}^{\mathbf{A}}$$

Така доказахме следната теорема

Теорема 2.49. Нека $\mathbf{A}$ е формула със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{z}$. Тогава, ако $\vdash_{ZF} \exists\mathbf{x}\forall\mathbf{z}(\mathbf{A} \to \mathbf{z} \in \mathbf{x})$, то в ZF можем да въведем нов n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ с дефинираща аксиома

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \forall\mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A}).$$

.

Въвеждаме следните означения (съкращения):

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{a} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} & \equiv & \forall\mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{A}) \\ \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} \subseteq \mathbf{a} & \equiv & \forall\mathbf{z}(\mathbf{A} \to \mathbf{z} \in \mathbf{a}) \\ \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} & \equiv & \mathbf{y} = \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{y} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\}. \end{array}$$

Забележка.Употребата на символа $=$ в рамките на съкращение по принцип не е добра практика, тъй като $=$ е логически символ, за който е валидна теоремата за равенството — доказуемо равни неща са взаимно заменяеми. В случая на горните съкращения тази теорема не е приложима в цялата си общност. Все пак имаме следните лесно установими свойства

$$\begin{array}{l} \mathbf{a} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} \to \mathbf{b} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} \to \mathbf{a} = \mathbf{b} \\ \mathbf{a} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} \to \mathbf{a} = \{\mathbf{z}' \mid \mathbf{B}\} \to \forall\mathbf{z}''(\mathbf{A}_{\mathbf{z}}[\mathbf{z}''] \leftrightarrow \mathbf{B}_{\mathbf{z}'}[\mathbf{z}'']), \quad \mathbf{z}'' \text{ не участва свободно в } \mathbf{A}, \mathbf{B} \\ \mathbf{a} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} \to (\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \leftrightarrow \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} \subseteq \mathbf{b}) \end{array}$$

Сега, теорема 2.42 може да се изкаже и по следния начин: Ако $\vdash_{ZF} \exists\mathbf{x}(\{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} \subseteq \mathbf{x})$, то тогава $\vdash_{ZF} \exists\mathbf{y}(\mathbf{y} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\})$ и можем да въведем нов n-местен функционален символ f с дефинираща аксиома $\mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\}$.

От аксиомата $x = x$ и правилото за замяната имаме $z = z$, откъдето, съгласно теоремата за тавтологиите) $z \neq z \to z \in x$ и следователно

$$\vdash_{ZF} \exists x\forall z(z \neq z \to z \in x),$$

т.е.

$$\vdash_{ZF} \exists x(\{z \mid z \neq z\} \subseteq x).$$

Въвеждаме нуламестен функционален символ $\varnothing$ с дефинираща аксиома

$$\varnothing = \{z \mid z \neq z\}.$$

Имаме $\vdash_{ZF} (z \in x \;\&\; z \in y) \to z \in x$, откъдето

$$\vdash_{ZF} \{z \mid z \in x \;\&\; z \in y\} \subseteq x$$

и значе

$$\vdash_{ZF} \exists x(\{z \mid z \in x \;\&\; z \in y\} \subseteq x)$$

Въвеждаме нов двуместен функционален символ $\cap$ с дефинираща аксиома

$$x \cap y = \{z \mid z \in x \;\&\; z \in y\}.$$

Аналогично въвеждаме нов двуместен функционален символ $\setminus$ с дефинираща аксиома

$$x \setminus y = \{z \mid z \in x \;\&\; z \notin y\}.$$

ZF 3. (Аксиома за чифта)

$$\exists x'(\{z \mid z = x \vee z = y\} \subseteq x').$$

Въвеждаме нов двуместен функционален символ $\{\cdot,\cdot\}$ (чифт) с дефинираща аксиома

$$\{x, y\} = \{z \mid z = x \vee z = y\}.$$

Чрез операцията чифт въвеждаме едноместната операция $\{\cdot\}$ (синглетон) и двуместната операция $(\cdot,\cdot)$ (наредена двойка) с дефиниращи аксиоми

$$\begin{array}{rcl} \{x\} & = & \{x, x\}, \\ (x, y) & = & \{\{x\}, \{x, y\}\}. \end{array}$$

ZF 4. (Аксиома за обединението)

$$\exists x'(\{z \mid \exists y(z \in y \,\&\, y \in x)\} \subseteq x')$$

Въвеждаме нов едноместен функционален символ $\bigcup$ с дефинираща аксиома

$$\bigcup x = \{z \mid \exists y(z \in y \,\&\, y \in x)\}.$$

Чрез $\bigcup$ и операцията чифт въвеждаме нов двуместен функционален символ $\cup$ (обединение на две множества) с дефинираща аксиома

$$x \cup y = \bigcup\{x, y\}.$$

Чрез $\cup$ и операцията синглетон въвеждаме нов едноместен функционален символ S (наследник) с дефинираща аксиома

$$Sx = x \cup \{x\}.$$

ZF 4. (Аксиома за безкрайността)

$$\exists x(\varnothing \in x \,\&\, \forall y(y \in x \to Sy \in x)).$$

Нека с $\mathbf{A}$ означим формулата $\varnothing \in x \,\&\, \forall y(y \in x \to Sy \in x)$. Тогава аксиомата за безкрайността казва, че $\exists \mathbf{x}\mathbf{A}$. Оттук лесно се устовява, че

$$\exists x(\{z \mid \forall x(\mathbf{A} \to z \in x\} \subseteq x).$$

Въвеждаме нов нуламестен функционален символ ω с дефинираща аксиома

$$\omega = \{z \mid \forall x(\mathbf{A} \to z \in x)\}.$$

От дефиницията следва, че

$$\vdash_{ZF} \mathbf{A} \to \omega \subseteq x,$$
$$\vdash_{ZF} \mathbf{A}_x[\omega].$$

Така ω е най-малкото (по отношение на $\subseteq$) множество, което съсържа $\varnothing$ и е затворено относно операцията S. ω наричаме множество на естествените числа, а елементите му — естествени числа.

ZF 5. (Аксиома за подмножествата)

$$\exists x'(\{z \mid z \subseteq x\} \subseteq x').$$

Въвеждаме нов едноместен функционален символ $\mathcal{P}$ с дефинираща аксиома

$$\mathcal{P}x = \{z \mid z \subseteq x\}.$$

Въвеждаме нов едноместен функционален символ $\mathcal{P}$ с дефинираща аксиома

$$\mathcal{P}x = \{z \mid z \subseteq x\}.$$

ZF 6. (Схема за замяната)

$$\forall \mathbf{x}_1 \dots \forall \mathbf{x}_n \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{y}'((\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{A}_{\mathbf{y}}[\mathbf{y}']) \to \mathbf{y} = \mathbf{y}') \to \forall \mathbf{z} \exists \mathbf{z}' \forall \mathbf{x}_1 \dots \forall \mathbf{x}_n \forall \mathbf{y}(\mathop{\&}_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{x}_i \in \mathbf{z} \to \mathbf{A} \to \mathbf{y} \in \mathbf{z}'),$$

където $\mathbf{A}$ е формула със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}$.

За всеки терм $\mathbf{a}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ и всяка формула $\mathbf{A}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ ще пишем

$$\{\mathbf{a} \mid \mathbf{A}\}$$

вместо

$$\{\mathbf{z} \mid \exists \mathbf{x}_1 \dots \exists \mathbf{x}_n(\mathbf{z} = \mathbf{a} \,\&\, \mathbf{A})\}$$

При горните означения, ако $\vdash_{ZF} \exists \mathbf{x}(\mathbf{A} \to \&_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{x}_i \in \mathbf{x})$, то от схемата за замяната следва, че

$$\vdash_{ZF} \exists \mathbf{x}'\{\mathbf{a} \mid \mathbf{A}\} \subseteq \mathbf{x}',$$

което ни позволява да дефинираме нов m-местен функционален символ $\mathbf{f}$ чрез дефинираща аксиома

$$\mathbf{f}\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_m = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{A}\}.$$

Например, въвеждаме двуместния функционален символ $\times$ (декартово произведение) с дефинираща аксиома

$$x \times y = \{(x', y') \mid x' \in x \,\&\, y' \in y\}.$$