4.2 Кодиране

Разглежзаме $\mathcal{L}(PA)$. Нека $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \ldots$ е едно фиксирано изреждане на променливите. Полагаме $SN(\mathbf{z}_i) = 2i$. Полагаме още $SN(=) = 1$, $SN(\neg) = 3$, $SN(\vee) = 5$, $SN(\exists) = 7$, $SN(0) = 9$, $SN(S) = 11$, $SN(+) = 13$, $SN(.) = 15$ и $SN(<) = 17$. Дефинираме код $\ulcorner\mathbf{a}\urcorner$ на терма $\mathbf{a}$ чрез

$$\ulcorner\mathbf{a}\urcorner = \begin{cases} \langle SN(\mathbf{x})\rangle, & \mathbf{a} \equiv \mathbf{x},\ \mathbf{x} \text{ е променлива;} \\ \langle SN(0)\rangle, & \mathbf{a} \equiv 0; \\ \langle SN(S), \ulcorner\mathbf{a}_1\urcorner\rangle, & \mathbf{a} \equiv S\mathbf{a}_1; \\ \langle SN(+), \ulcorner\mathbf{a}_1\urcorner, \ulcorner\mathbf{a}_2\urcorner\rangle, & \mathbf{a} \equiv +\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2; \\ \langle SN(.), \ulcorner\mathbf{a}_1\urcorner, \ulcorner\mathbf{a}_2\urcorner\rangle, & \mathbf{a} \equiv .\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2. \end{cases}$$

Дефинираме код $\ulcorner\mathbf{A}\urcorner$ на формула $\mathbf{A}$ чрез

$$\ulcorner\mathbf{A}\urcorner = \begin{cases} \langle SN(=), \ulcorner\mathbf{a}_1\urcorner, \ulcorner\mathbf{a}_2\urcorner\rangle, & \mathbf{A} \equiv = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2; \\ \langle SN(<), \ulcorner\mathbf{a}_1\urcorner, \ulcorner\mathbf{a}_2\urcorner\rangle, & \mathbf{a} \equiv < \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2; \\ \langle SN(\neg), \ulcorner\mathbf{B}\urcorner\rangle, & \mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{B}; \\ \langle SN(\vee), \ulcorner\mathbf{B}\urcorner, \ulcorner\mathbf{C}\urcorner\rangle, & \mathbf{A} \equiv \vee\mathbf{B}\mathbf{C}; \\ \langle SN(\exists), \ulcorner\mathbf{x}\urcorner, \ulcorner\mathbf{B}\urcorner\rangle, & \mathbf{A} \equiv \exists\mathbf{x}\mathbf{B}. \end{cases}$$

Дефинираме следните изчислими функции и предикати, свързани с кодовете на термовете и формулите.

(i) $Vble(a) \iff seq(a)\ \&\ \exists x_{x<a}(a = 2x)$. Тогава

$$Vble(a) \iff a = \ulcorner\mathbf{x}\urcorner \text{ за някоя променлива } \mathbf{x}.$$

(ii) $Term(a) \iff \begin{cases} 0 = 0, & a = \langle SN(0)\rangle; \\ Term((a)_1), & a = \langle (SN(S), (a)_1\rangle; \\ Term((a)_1)\ \&\ Term((a)_2), & a = \langle SN(+), (a)_1, (a)_2\rangle \vee a = \langle SN(.), (a)_1, (a)_2\rangle \\ Vble(a), & \text{иначе.} \end{cases}$. Тогава

$$Term(a) \iff a = \ulcorner\mathbf{a}\urcorner \text{ за някой терм } \mathbf{a}.$$

(iii) $AFor(a) \iff a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2\rangle\ \&\ ((a)_0 = SN(=) \vee (a)_0 = SN(<))\ \&\ Term((a)_1)\ \&\ Term((a)_2)$. Тогава

$$AFor(a) \iff a = \ulcorner\mathbf{A}\urcorner \text{ за някоя атомарна формула } \mathbf{A}$$

(iv) $For(a) \iff \begin{cases} For((a)_1), & a = \langle SN(\neg), (a)_1); \\ For((a)_1)\ \&\ For((a)_2), & a = \langle (SN(\neg), (a)_1, (a)_2\rangle; \\ Vble((a)_1)\ \&\ For((a)_2), & a = \langle (SN(\exists), (a)_1, (a)_2\rangle; \\ AFor(a), & \text{иначе.} \end{cases}$. Тогава

$$For(a) \iff a = \ulcorner\mathbf{A}\urcorner \text{ за някоя формула } \mathbf{A}.$$

(v) $Sub(a,b,c) = \begin{cases} c, & Vble(a)\ \&\ a = b; \\ \langle (a)_0, Sub((a)_1, b, c)\rangle, & a = \langle (a)_0, (a)_1\rangle \\ \langle (a)_0, Sub((a)_1, b, c), Sub((a)_2, b, c)\rangle, & a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2\rangle\ \&\ (a)_0 \neq SN(\exists); \\ \langle (a)_0, (a)_1, Sub((a)_2, b, c)\rangle, & a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2\rangle\ \&\ (a)_0 = SN(\exists)\ \&\ (a)_1 \neq b; \\ a, & \text{иначе.} \end{cases}$. Тогава

$$\begin{aligned} Sub(\ulcorner\mathbf{a}\urcorner, \ulcorner\mathbf{x}\urcorner, \ulcorner\mathbf{b}\urcorner) &= \ulcorner\mathbf{a}_{\mathbf{x}}[\mathbf{b}]\urcorner, \text{ за всеки два терма } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ и всяка променлива } \mathbf{x} \\ Sub(\ulcorner\mathbf{A}\urcorner, \ulcorner\mathbf{x}\urcorner, \ulcorner\mathbf{a}\urcorner) &= \ulcorner\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]\urcorner, \text{ за всяка формула } \mathbf{A}, \text{ всяка променлива } \mathbf{x} \text{ и всеки терм } \mathbf{a}, \text{подходящ за замяна.} \end{aligned}$$

(vi) $Fr(a,b) \iff \begin{cases} a = b, & Vble(a); \\ Fr((a)_1, b), & a = \langle (a)_0, (a)_1\rangle \\ Fr((a)_1, b) \vee Fr((a)_2, b), & a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2\rangle\ \&\ (a)_0 \neq SN(\exists); \\ Fr((a)_2, b)\ \&\ (a)_1 \neq b, & \text{иначе} \end{cases}$. Тогава за всеки терм $\mathbf{a}$ и всяка променлива $\mathbf{x}$ е в сила

$$Fr(\ulcorner\mathbf{a}\urcorner, \ulcorner\mathbf{x}\urcorner) \iff \mathbf{x} \text{ е променлива на } \mathbf{a},$$

а за всяка формула **A** и всяка променлива **x** е в сила

$$Fr(\ulcorner \mathbf{A} \urcorner, \ulcorner \mathbf{x} \urcorner) \iff \mathbf{x} \text{ участва свободно в } \mathbf{A}.$$

(vii) $Subtl(a,b,c) \iff \begin{cases} Subtl((a)_1,b,c), & a = \langle (a)_0,(a)_1 \rangle; \\ Subtl((a)_1,b,c) \ \&\ Subtl((a)_2,b,c)), & a = \langle (a)_0,(a)_1,(a)_2 \rangle \ \&\ (a)_0 \neq SN(\exists); \\ Subtl((a)_2,b,c) \ \&\ \neg Fr(c,(a)_1)), & a = \langle (a)_0,(a)_1,(a)_2 \rangle \ \&\ (a)_0 = SN(\exists) \ \&\ (a)_1 \neq b \\ 0=0, \text{иначе} \end{cases}$. Тогава

за всяка формула **A**, всяка променлива **x** и всеки терм **a** е в сила

$$Subtl(\ulcorner \mathbf{A} \urcorner, \ulcorner \mathbf{x} \urcorner, \ulcorner \mathbf{a} \urcorner) \iff \mathbf{a} \text{ е подходящ за замяна на } \mathbf{x} \text{ в } \mathbf{A}.$$

(viii) $PAx(a) \iff a = \langle SN(\vee), \langle SN(\neg),(a)_2 \rangle, (a)_2 \rangle \ \&\ For((a)_2)$. Тогава

$$PAx(a) \iff a = \ulcorner \neg \mathbf{A} \vee \mathbf{A} \urcorner \text{ за някоя формула } \mathbf{A},$$

т.е. a е код на съждителна аксиома.

(ix) $SAx(a) \iff \exists x_{x<a} \exists y_{y<a} \exists z_{z<a} (a = \langle SN(\vee), \langle SN(\neg), Sub(x,y,z) \rangle, \langle SN(\exists), y, x \rangle \ \&\ For(x) \ \&\ Vble(y) \ \&\ Term(z) \ \&\ Subtl(x,y,z))$. Тогава

$$SAx(a) \iff a \text{ е код на аксиома за субституцията.}$$

(x) $EAx(a)$, където

$$EAx(a) \iff a \text{ е код на аксиома за равенството.}$$

(xi) $LAx(a) \iff PAx(a) \vee SAx(a) \vee EAx(a)$. Тогава

$$LAx(a) \iff a \text{ е код на логическа аксиома.}$$

Нелогическите аксиоми N1—N9 на PA са конкретни формули, имащи конкретни кодове. Нека тези кодове са $a_1, \dots a_9$.

(xii) $NAx_{PA}(a) \iff \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant 9} a = a_i \vee \exists x_{x<a} \exists y_{y<a} (a = \langle SN(\vee), \langle SN(\neg), Sub(x,y,\langle SN(0) \rangle \rangle,$ $\langle SN(\vee), \langle SN(\neg), \langle SN(\exists), y, \langle SN(\neg), \langle SN(\vee), \langle SN(\neg), x \rangle, Sub(x,y,\langle SN(S), y \rangle \rangle \rangle \rangle, x \rangle \rangle \ \&\ For(x) \ \&\ Vble(y))$. Тогава

$$NAx(a) \iff a \text{ е код на нелогическа аксиома на } PA.$$

(xiii) $Ax_{PA}(a) \iff LAx(a) \vee NAx_{PA}(a)$. Тогава

$$Ax_{PA}(a) \iff a \text{ е код на аксиома на } PA.$$

(xiv) $ER(a,b) \iff b = \langle SN(\vee), (b)_1, a \rangle$. Тогава за всеки две формули **A** и **B** е в сила $ER(\ulcorner \mathbf{A} \urcorner, \ulcorner \mathbf{B} \urcorner)$ тогава и само тогава, когато **B** се получава от **A** чрез (ПР).

Дефинираме съответните предикати за (ПСв), (ПА), (ПС) и (П∃)

(xv) $CR(a,b) \iff a = \langle SN(\vee), b, b \rangle$

(xvi) $AR(a,b) \iff (a)_0 = SN(\vee) \ \&\ (a)_{2,0} = SN(\vee) \ \&\ b = \langle SN(\vee), \langle SN(\vee), a_1, a_{2,1} \rangle, a_{2,2} \rangle$

(xvii) $TR(a,b,c) \iff (a)_0 = SN(\vee) \ \&\ (b)_0 = SN(\vee) \ \&\ (b)_1 = \langle SN(\neg), (a_1) \rangle \ \&\ c = \langle (SN(\vee), (a)_2, (b)_2 \rangle$.

(xviii) $IR(a,b) \iff \begin{array}{l} (a)_0 = SN(\vee) \ \&\ (a)_{1,0} = SN(\neg) \ \&\ \neg Fr((a)_2, (b)_{1,1,1} \ \&\ \\ b = \langle SN(\vee), \langle SN(\neg), \langle SN(\exists), (b)_{1,1,1}, (a)_1 \rangle \rangle, (a)_2 \rangle \end{array}$.

Кодът на редицата от изрази $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ е $\langle \ulcorner \mathbf{u}_1 \urcorner, \dots, \ulcorner \mathbf{u}_n \urcorner \rangle$.

(xix) $Prf_{PA}(a) \iff seq(a) \ \&\ \mathrm{lh}(a) \neq 0 \ \&\ \forall i_{i<\mathrm{lh}(a)} (For((a)_i) \ \&\ (Ax_{PA}((a)_i) \vee \exists j_{j<i} \exists k_{k<i} (ER((a)_j,(a)_i) \vee CR((a)_j,(a)_i) \vee AR((a)_j,(a)_i) \vee TR((a)_j,(a)_k,(a)_i) \vee IR((a)_j,(a)_i)))$. Тогава

$$Prf_{PA}(a) \iff a = \langle \ulcorner \mathbf{A}_1 \urcorner, \dots, \ulcorner \mathbf{A}_n \urcorner \rangle \text{ за някое доказателство } \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n \text{ в } PA.$$

(xx) $Pr_{PA}(a,b) \iff Prf_PA(b) \ \&\ a = (b)_{\mathrm{lh}(b) \dot{-} 1}$. Тогава

$$Pr_{PA}(\ulcorner \mathbf{A} \urcorner, b) \iff b \text{ е код на доказателство на } \mathbf{A}.$$

Дефинираме още предиката

$$Thm_{PA}(a) \iff \exists x Pr_{PA}(a,x).$$

Тогава

$$Thm_{PA}(\ulcorner \mathbf{A} \urcorner) \iff \vdash_{PA} \mathbf{A}.$$