4.3 Представимост на функции и релации.

Нека $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}$ са различни променливи и нека $\mathbf{A}$ е формула със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}$. Ще казваме, че $\mathbf{A}$ с $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}$ представя k-местната функция F, ако за всеки избор на естествени числа $n_1, \ldots, n_k$ е в сила

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}] \leftrightarrow \mathbf{y} = \overline{F(n_1, \ldots, n_k)},$$

където с $\overline{n}$ означаваме номерала $S^n 0$. Казваме, че F е представима, ако F може да се представи чрез някоя формула.

Забележка. Нека A с $\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_k, \mathbf{y}'$ представя F и нека $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}$ са произволни променливи. Нека $\mathbf{A}'$ е вариант на $\mathbf{A}$ в който всички квантори са по нови променливи. Тогава съгласно теоремата за варианта $\mathbf{A}'_{\mathbf{x}'_1 \ldots \mathbf{x}'_k \mathbf{y}'}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}]$ с $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}$ представя F.

Нека $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ са различни променливи и нека $\mathbf{a}$ е терм със променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}$. Ще казваме, че $\mathbf{a}$ с $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ представя k-местната функция F, ако за всеки избор на естествени числа $n_1, \ldots, n_k$ е в сила

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{a}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_k}[\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}] = \overline{F(a_1, \ldots, a_k)},$$

Ясно е, че в този формулата $\mathbf{a} = y$ с $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}$ представя F.

Нека $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ са различни променливи и нека $\mathbf{A}$ е формула със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$. Ще казваме, че $\mathbf{A}$ с $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ представя k-местния предикат P, ако за всеки избор на естествени числа $n_1, \ldots, n_k$ са в сила

$$\begin{array}{rcl} P(a_1, \ldots, a_n) & \Longrightarrow & \vdash_{PA^-} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}]; \\ \neg P(a_1, \ldots, a_n) & \Longrightarrow & \vdash_{PA^-} \neg\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}]; \end{array}$$

Казваме, че P е представим, ако P може да се представи чрез някоя формула.

От вече доказаното за PA^- имаме, че формулите $x = y$, $x < y$ и термовете $x + y$, $x.y$ с променливите x, y представят съответно предикатите $=$, $<$ и функциите $+, .$. Ще докажем, че всяка изчислима функция и всеки изчислим предикат е представим. За целта първо ще докажем следните твърдения.

Твърдение 4.2.

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{A}_\mathbf{x}\left[\overline{0}\right] \to \cdots \to \mathbf{A}_\mathbf{x}\left[\overline{n-1}\right] \to \mathbf{x} < \overline{n} \to \mathbf{A}.$$

Доказателство.

$$\dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{}{\mathbf{x} \nless 0}\ \text{N7,(ПЗ)}}{\mathbf{x} < 0 \to \mathbf{A}}\ \text{(TT)} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_\mathbf{x}\left[\overline{0}\right] \to \cdots \to \mathbf{A}_\mathbf{x}\left[\overline{n-2}\right] \to \mathbf{x} < \overline{n-1} \to \mathbf{A} \end{array} \qquad \dfrac{}{\mathbf{x} < \overline{n} \leftrightarrow (\mathbf{x} < \overline{n-1} \vee \mathbf{x} = \overline{n-1})}\ \text{N8,(ПЗ)} \qquad \dfrac{}{\mathbf{x} = \overline{n-1} \to (\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}_\mathbf{x}\left[\overline{n-1}\right])}}{\mathbf{A}_\mathbf{x}\left[\overline{0}\right] \to \cdots \to \mathbf{A}_\mathbf{x}\left[\overline{n-1}\right] \to \mathbf{x} < \overline{n} \to \mathbf{A}}$$

□

Твърдение 4.3. Ако $\vdash_{PA^-} \neg\mathbf{A}_\mathbf{x}\left[\overline{m}\right]$ за всяко $m < n$ и $\vdash_{PA^-} \mathbf{A}_\mathbf{x}\left[\overline{n}\right]$, то

$$\vdash_{PA^-} (\mathbf{A} \mathbin{\&} \forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \neg\mathbf{A}_\mathbf{x}[\mathbf{y}])) \leftrightarrow \mathbf{x} = \overline{n}.$$

Доказателство. Ще докажем първо посоката от дясно наляво. Съгласно условието и предното твърдение

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{y} < \overline{n} \to \neg\mathbf{A}_\mathbf{x}[\mathbf{y}],$$

откъдето

$$\vdash_{PA^-} \forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \overline{n} \to \neg\mathbf{A}_\mathbf{x}[\mathbf{y}])$$

и значи

$$\vdash_{PA^-} \forall\mathbf{y}(\mathbf{y} < \overline{n} \to \neg\mathbf{A}_\mathbf{x}[\mathbf{y}]) \mathbin{\&} \mathbf{A}_\mathbf{x}\left[\overline{n}\right]$$

От друга старана съгласно теоремата за равенството

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{x} = \overline{n} \to ((\mathbf{A} \,\&\, \forall \mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \neg \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}])) \leftrightarrow (\mathbf{A}_{\mathbf{x}}\,[\overline{n}] \,\&\, \forall \mathbf{y}(\mathbf{y} < \overline{n} \to \neg \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]))$$

и следователно

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{x} = \overline{n} \to (\mathbf{A} \,\&\, \forall \mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \neg \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}])$$

За обратната посока, от предното твърдение и условието имаме

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{x} < \overline{n} \to \neg \mathbf{A},$$

откъдето

$$\vdash_{PA^-} (\mathbf{A} \,\&\, \forall \mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \neg \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]) \to \mathbf{x} \nless \overline{n}.$$

От друга страна, съгласно теоремата за субституцията

$$\vdash_{PA^-} \forall \mathbf{y}(\mathbf{y} < \overline{\mathbf{x}} \to \neg \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]) \to \overline{n} < \mathbf{x} \to \neg \mathbf{A}_{\mathbf{x}}\,[\overline{n}]$$

и тогава предвид условието

$$\vdash_{PA^-} (\mathbf{A} \,\&\, \forall \mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \neg \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]) \to \overline{n} \nless \mathbf{x}.$$

Оттук и $\vdash_{PA^-} \mathbf{x} < \overline{n} \vee \mathbf{x} = \overline{n} \vee \overline{n} < \mathbf{x}$ получаваме

$$\vdash_{PA^-} (\mathbf{A} \,\&\, \forall \mathbf{y}(\mathbf{y} < \mathbf{x} \to \neg \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]) \to \mathbf{x} = \overline{n}.$$

□

Твърдение 4.4. Предикатът P е представим тогава и само тогава, когато функцията K_P е представима.

Доказателство. Нека формулата $\mathbf{A}$ с променливи $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ представя P и нека $\mathbf{B}$ е формулата

$$(\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{y} = \overline{1}) \vee (\neg \mathbf{A} \,\&\, \mathbf{y} = \overline{0}),$$

където $\mathbf{y}$ е нова променлива. Ще докажем, че $\mathbf{B}$ с $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}$ представя K_P. Нека $n_1, \ldots, n_k$ са естествени числа. Нека първо $K_P(n_1, \ldots, n_k) = 1$. Тогава $P(n_1, \ldots, n_k)$ и следователно $\vdash_{PA^-} A_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_k}[\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}]$ и значи съгласно теоремата за тавтологиите

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{B}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_k}[\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}] \leftrightarrow \mathbf{y} = \overline{1}.$$

Аналогично, ако $K_P(n_1, \ldots, n_k) = 0$, то

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{B}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_k}[\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}] \leftrightarrow \mathbf{y} = \overline{0}$$

и следователно $\mathbf{B}$ с $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}$ представя K_P.

Обратно нека $\mathbf{A}$ с $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}$ представя K_P. Нека $\mathbf{B}$ е формулата

$$A_{\mathbf{y}}\left[\overline{1}\right].$$

Тогава, съгласно дефиницията за представимост на функция, за произволни естествени $n_1, \ldots, n_k$

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{B}_{\mathbf{x} \ldots \mathbf{x}_k}[\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}] \leftrightarrow \overline{1} = \overline{K_P(n_1, \ldots, n_k)}.$$

Оттук, теоремата за тавтологиите и $\vdash_{PA^-} \overline{1} \neq \overline{0}$ получаваме

$$\begin{aligned} P(a_1, \ldots, a_n) \quad &\Longrightarrow \quad \vdash_{PA^-} \mathbf{B}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_k}[\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}]; \\ \neg P(a_1, \ldots, a_n) \quad &\Longrightarrow \quad \vdash_{PA^-} \neg \mathbf{B}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_k}[\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}]; \end{aligned}$$

и значи $\mathbf{B}$ с $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}$ представя P.

□

Теорема 4.5. Всички изчислими функция и всеки изчислими предикати са представими.

Доказателство. Предвид предното твърдение достатъчно е да докажем твърдението за изчислими функции. Вече видяхме, че $+$, $.$, $<$, а значи и $K_<$ са представими. Ясно е, че термът $\mathbf{x}_i$ с $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_k$ представя I_i^k.

Нека сега F се дефинира чрез

$$F(a_1, \dots, a_k) = G(H_1(a_1, \dots, a_k), \dots, H_m(a_1, \dots, a_k)),$$

където $G, H_1, \dots, H_m$ са представими. Нека $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m, \mathbf{y}$ са различни променливи и нека $\mathbf{B}$ с $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m \mathbf{y}$ представя G, а $\mathbf{B}_i$ с $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_i$ представя H_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Да разгледаме формулата

$$\mathbf{A} \equiv \exists \mathbf{y}_1 \dots \exists \mathbf{y}_m (\mathbf{B}_1 \ \& \ \dots \ \& \ \mathbf{B}_m \ \& \ \mathbf{B})$$

Ще покажем, че $\mathbf{A}$ с $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}$ представя F. Нека $F(a_1, \dots, a_k) = c$. Тогава $H_i(a_1, \dots, a_k) = b_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$ и $G(b_1, \dots, b_m) = c$ Нека $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{B}'_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$ се получават от $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, замествайки $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ съответно с $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}$. Тогава

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{B}'_i \leftrightarrow \mathbf{y}_i = \overline{b_i}, \ 1 \leqslant i \leqslant m$$

и следователно

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{A}' \leftrightarrow \exists \mathbf{y}_1 \dots \exists \mathbf{y}_m (\mathbf{y}_1 = \overline{b_1} \ \& \ \dots \ \& \ \mathbf{y}_m = \overline{b_m} \ \& \ \mathbf{B})$$

Оттук и следствие към теоремата за равенството получаваме

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{A}' \leftrightarrow \mathbf{B}_{\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_m}[\overline{b_1}, \dots, \overline{b_m}]$$

и следователно

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{A}' \leftrightarrow \mathbf{y} = \overline{c}.$$

Накрая нека F е дефинирана чрез

$$F(a_1, \dots, a_k) = \mu x (G(a_1, \dots, a_k, x) = 1)$$

нека $\mathbf{B}$ с $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ представя G. Нека $\mathbf{z}$ е нова променлива и

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}_{\mathbf{y}}[\overline{1}] \ \& \ \forall \mathbf{z} (\mathbf{z} < \mathbf{x} \to \neg \mathbf{B}_{\mathbf{xy}}[\mathbf{z}, \overline{1}]).$$

Ще покажем, че $\mathbf{A}$ с $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}$ представя F. Нека $F(a_1, \dots, a_k) = b$ и $G(a_1, \dots, a_k, i) = c_i$, $i \leqslant b$. Тогава $c_b = 1$ и $c_i \neq 1$ за $i < b$. Нека $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{B}'$ се получават от $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, замествайки $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ с $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}$. Тогава

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{B}'_{\mathbf{x}}[\overline{i}] \leftrightarrow \mathbf{y} = \overline{c_i}$$

и следователно

$$\vdash_{PA^-} \neg \mathbf{B}'_{\mathbf{xy}}[\overline{i}, \overline{1}], \ 0 \leqslant i < b$$

и

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{B}'_{\mathbf{xy}}[\overline{b}, \overline{1}].$$

Оттук и Твърдение 4.3

$$\vdash_{PA^-} \mathbf{A}' \leftrightarrow \mathbf{x} = \overline{b}.$$

□