4.4 Неразрешимост и непълнота

Ще казваме, че една формална система $\mathcal{F}$ е разрешима, ако съществува алгоритъм, който за всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$ връща „да“, ако $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$ и връща „не“, ако $\nvdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$. Ако $\mathcal{F}$ е формална система, която допуска ефективно кодиране, в смисъла на раздел 4.2[1], то $\mathcal{F}$ е разрешима тогава и само тогава, когато предикатът $Thm_{\mathcal{F}}$ е изчислим.

Твърдение 4.6. Нека $\mathcal{F}$ е пълна формална система, имаща ефективно кодиране, спрямо което аксиомите ѝ образуват изчислимо номеруемо множество. Тогава $\mathcal{F}$ е разрешима.

Доказателство. Нека $\mathcal{F}$ изпълнява условията на теоремата и фиксираме едно ефективно кодиране на $\mathcal{F}$, при което аксиомите ѝ образуват изчислимо номеруемо множество. Тогава предикатите $Ax_{\mathcal{F}}$, $Prf_{\mathcal{F}}$, $Pr_{\mathcal{F}}$ и $Thm_{\mathcal{F}}$ също са изчислимо номеруеми.

Нека $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{F}$. От $\mathbf{A}$ можем ефективно да определим свободните ѝ променливи. Нека например те са $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Образуваме формулата $\mathbf{B}\forall\mathbf{x}_1 \ldots \forall\mathbf{x}_n\mathbf{A}$. Тогава $\mathbf{B}$ е затворена и равнодоказуема с $\mathbf{A}$ в $\mathcal{F}$. Тъй като $\mathcal{F}$ е пълна, то точно е една от формулите $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}$ е теорема на $\mathcal{F}$.

Образуваме $\ulcorner\mathbf{B}\urcorner$ и $\ulcorner\neg\mathbf{B}\urcorner$ и пускаме алгоритъм, който последователно изрежда елементите на $Thm_{\mathcal{F}}$. Тъй като $\mathcal{F}$ е пълна, то в даден момент алгоритъмът или ще номерира $\ulcorner\mathbf{B}\urcorner$, или ще номерира $\ulcorner\neg\mathbf{B}\urcorner$, като в първия случай $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$, а във втория $\nvdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$.

□

Теорема 4.7 (Чърч)**.** Ако $\mathcal{F}$ е непротиворечиво разширение на PA^-, то $\mathcal{F}$ не е разрешима.

Доказателство. Нека $\mathbf{x}$ е фиксирана променлива. За всяка формула $\mathbf{A}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}$, дефинираме

$$E(\mathbf{A}) = \{a \mid \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\overline{a}]\}.$$

Нека B е изчислимо множество и нека $\mathbf{B}$ с $\mathbf{x}$ представя B. Тогава

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\bar{b}] \iff b \in B$$

$$\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\bar{b}] \iff b \notin B$$

и следователно

$$B = E(\mathbf{B}).$$

Дефинираме предиките P и Q чрез

$$P(a, b) \iff Thm_{\mathcal{F}}(Sub(a, \ulcorner\mathbf{x}\urcorner, Num(b))).$$

и

$$Q(a) \iff \neg P(a, a).$$

Тогава

$$E(\mathbf{B}) = \{b \mid P(\ulcorner\mathbf{B}\urcorner, b)\}.$$

От друга страна за всяко a

$$Q \neq \{b \mid P(a, b)\},$$

защото ако допуснем, че $Q = \{b \mid P(a_0, b)\}$ за някое a_0, то $Q(a_0) \iff P(a_0, a_0) \iff \neg Q(a_0)$, което е невъзможно. Следователно $Q \neq E(\mathbf{B})$ за всяка формула $\mathbf{B}$ и значи Q не е изчислим. Но

$$Q(a) \iff \neg Thm_{\mathcal{F}}(Sub(a, \ulcorner\mathbf{x}\urcorner, Num(a)))$$

и следователно $Thm_{\mathcal{F}}$ не е изчислим (тъй като Sub и Num са изчислими).

□

Така доказахме следната

[1]Достатъчно е да съществува алгоритъм, който по символ на езика да дава кода на символа и неговата местност.

Теорема 4.8 (Гьодел, за непълнота)**.** Нека $\mathcal{F}$ е непротиворечиво разширение на PA^{-} с изчислимо множество от нелогически аксиоми. Тогава $\mathcal{F}$ не е пълна. В частност PA е непълна и не може да се попълни ефективно.