Примерни решения на Домашно №2

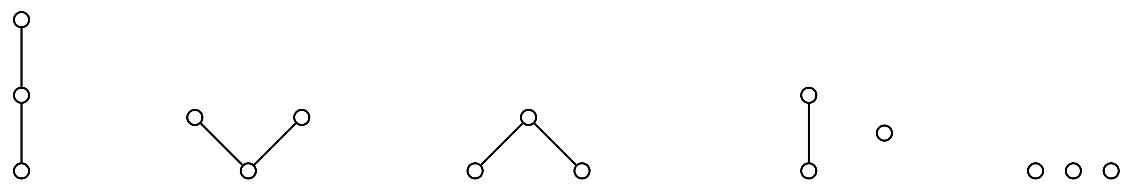
Задача 1: Нека $A = \{a, b, c, d\}$.

10 т. • Нарисувайте всички анонимни диаграми на Hasse на релации на частична наредба над A. "Анонимна диаграма на Hasse" в случая означава диаграма на Hasse, в която върховете са неименувани. Щом върховете не са именувани, това, което отличава две диаграми на Hasse, е само фóрмата им.

15 т. • Използвайки резултата от предното подусловие, намерете броя на частичните наредби над A.

Трябва да обосновете отговорите си много прецизно и подробно.

Решение: Лесно е да нарисуваме някои диаграми на Hasse с 4 върха. Трудно е да сме сигурни, че сме нарисували всички диаграми на Hasse с 4 върха. Трябва да го правим систематично, за да е ясно, че не сме пропуснали диаграма. Има много начини за това. Един от тях е да започнем от петте неизоморфни диаграми на Hasse на 3 върха от лекции:



и към всяка да добавим нов връх, свързвайки го или не с вече сложените върхове по всички възможни начини според правилата за диаграма на Hasse, като след това от всеки клас получени изоморфни диаграми оставим само една.

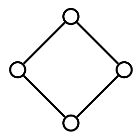
Друг начин е да го направим от първи принципи. Ако мислим за диаграмите като за неориентирани графи, всяка от тях е свързана или не. При 4 върха сравнително трудно е да се конструират десетте свързани диаграми по начин, който не оставя съмнение, че може да има и друга свързана диаграма. Шестте несвързани диаграми са много по-очевидни. Тук ще подходим по този начин.

И така, сега конструираме **свързаните** диаграми с 4 върха. Знаем, че всяка диаграма има поне един минимален и поне един максимален елемент – това е тривиално следствие от факта, че всяка крайна частична наредба има поне един минимален и поне един максимален елемент, а диаграмите на Hasse са "окастрени" версии на диаграмите на частични наредби като ориентирани графи с примки. Да въведем понятието *сигнатура* на диаграма на Hasse като наредена двойка (p, q), където p е броят на минималните, а q е броят на максималните елементи. Щом върховете са четири и диаграмата е свързана, не може да има изолирани върхове; изолиран връх в контекста на диаграми на Hasse е елемент, който е минимален и максимален. Следователно, множеството от минималните елементи има празно сечение с множеството от максималните елементи. Следователно, ако сигнатурата е (p, q), то $p + q \leq 4$. От друга страна, $2 \leq p + q$, понеже има минимален и има максимален. Тогава възможнстите за сигнатура са точно тези:

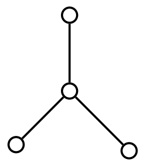
$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2)$$

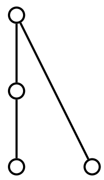
Да ги разгледаме в този ред.

• Сигнатура $(1, 1)$. Двата елемента, които не са нито минимален, нито максимален, може да са сравними или да не са сравними помежду си, и съответно има точно две диаграми с такава сигнатура:

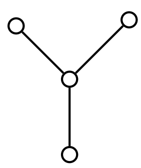


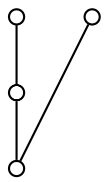
- Сигнатура $(2,1)$. Единственият елемент, който не е нито минимален, нито максимален, може да бъде сравним и с двата минимални или да е сравним само с единия минимален, и съответно има точно две диаграми с такава сигнатура:



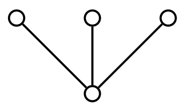


- Сигнатура $(1,2)$. Поради дуалността минималност–максималност ситуацията е симетрична на предната и има точно две диаграми с такава сигнатура:

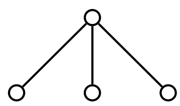




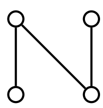
- Сигнатура $(1,3)$. Сега всеки елемент е или минимален, или максимален. Има точно една диаграма с такава сигнатура:

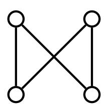


- Сигнатура $(3,1)$. От съображения за симетрия с предния случай, има точно една диаграма с такава сигнатура:



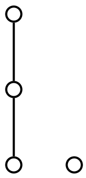
- Сигнатура $(2,2)$. Всеки елемент е или минимален, или максимален, но има два минимални и два максимални. Очевидно единият минимален трябва да е сравним с единия максимален и другият минимален трябва да е сравним с другия максимален. Но ако няма други двойки сравними елементи, диаграмата няма да е свързана. А в момента разглеждаме само свързани диаграми. Поради това разбиваме само на два подслучая: или има един минимален и един максимален, които не са сравними, или всеки минимален е сравним с всеки максимален. Има точно две диаграми с такава сигнатура:

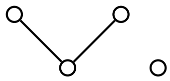


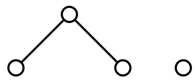


Конструирахме десетте свързани диаграми. Сега конструираме **несвързаните** диаграми. Те може да имат две, три или четири свързани компоненти.

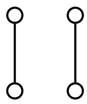
Конструираме диаграмите с две свързани компоненти. Те се разбиват на диаграмите, в които едната компонента има три елемента (което влече наличие на изолиран елемент) и на тези, в които всяка компонента е с два елемента. Диаграмите с изолиран елемент са точно тези:



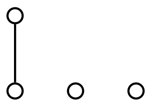




Има само една диаграма с двуелементни компоненти:



Има само една диаграма с три компоненти:

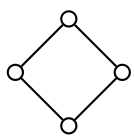


Има само една диаграма с четири компоненти:

Дотук намерихме шестнадесет диаграми на Hasse и се убедихме, че няма други. Сега да видим по колко съществено различни начина може да сложим имената на върховете във всяка от диаграмите на Hasse. "Съществено различни" означава, ако гледаме съответните диаграми на релации (те са ориентирани графи с примки), те да не са изоморфни като именувани графи след слагането на имената на върховете. Под всяка диаграма ще записваме броя на съществено различните именувания.

Да разгледаме диаграмите със сигнатура $(1, 1)$.

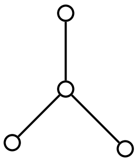
24



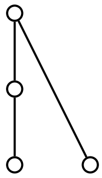
12

За диаграмата вдясно има 4 възможности за минималния елемент, после 3 за елемента непосредствено над него и още 2 за третия отдолу нагоре; общо $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. За диаграмата вдясно има 4 възможности за минималния и 3 за максималния и това определя релацията на пълно; общо $4 \cdot 3 = 12$.

Да разгледаме диаграмите със сигнатура $(2, 1)$.



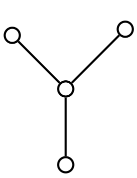
12



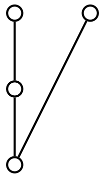
24

За диаграмата вдясно има 4 възможности за максималния елемент и после 3 за елемента непосредствено под него; това определя релацията напълно, понеже останалите два елемента са несравними помежду си. За диаграмата вдясно има 4 възможности за максималния, после 3 за минималния, който го предшества непосредствено, и после още 2 за другия минимален и това определя релацията на пълно; общо $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Да разгледаме диаграмите със сигнатура $(1, 2)$.



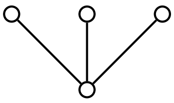
12



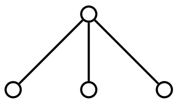
24

Числата са 12 и 24 поради симетрията с предния случай.

Да разгледаме диаграмите със сигнатура $(1, 3)$ и $(3, 1)$.



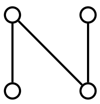
4



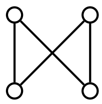
4

И в двата случая има точно четири съответни релации, защото изборът на минимален елемент вляво определя релацията напълно, а има 4 възможности за този избор; аналогично, изборът на максимален вдясно определя релацията напълно.

Да разгледаме диаграмите със сигнатура $(2, 2)$.



24



6

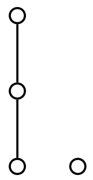
Всяка релация, съответна на диаграмата вляво, се определя напълно от максималния елемент, който е сравним с двата минимални, като има 4 възможности за него, после минималния, който е сравним с двата максимални, остават 3 възможности за него, и после другия минимален, за който остават 2 възможности; общо $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Всяка релация, съответна на диаграмата вдясно, се определя напълно от множеството от максималните елементи, а те може да бъдат избрани по $\binom{4}{2} = 6$ начина.

И така, свързаните диаграми на Hasse отговарят на

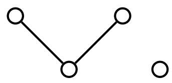
$$24 + 12 + 12 + 24 + 12 + 24 + 4 + 4 + 24 + 6 = 146$$

релации. Да видим колко релации съответстват на останалите диаграми на Hasse.

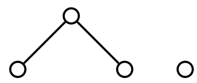
Да разгледаме диаграмите с две свързани компоненти.



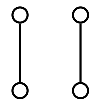
24



12



12



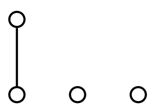
12

За диаграмата вляво, има 4 възможности за изолирания елемент и независимо от това има $3! = 6$ възможности за линейната наредба на останалите 3 елемента, откъдето общо са $4 \cdot 6 = 24$ възможности. За следващата диаграма има 4 възможности за изолирания елемент, а после изборът на минимален елемент за поддиаграмата с три елемента определя релацията напълно; възможностите са общо $4 \cdot 3 = 12$. За следващата възможностите са също 12 заради симетрията с предната. В последната диаграма, има два сравними елемента и още два сравними елемента, като между първата и втората група няма сравними елементи; двете групи нямат наредба помежду си, поради което възможностите за групиране са $\frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3$; алтернативно извеждане е това: елементът, който е максималния в една от групите, може да се групира с всеки от 3-те други елементи и това дава 3 възможни групирания; във всяка група има 2 начина за избор на максимален, което определя кой е минималният, и тези начини са независими; ерго, общо възможностите са $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

За диаграмите с две свързани компоненти, броят на съответните релации е

$$24 + 12 + 12 + 12 = 60$$

Да разгледаме диаграмите с три и четири свързани компоненти.



12

1

Диаграмата вляво отговаря на 12 релации, защото по $\binom{4}{2} = 6$ начина можем да изберем сравнимите елементи и после по 2 начина можем да изберем максималния; общо това са $6 \cdot 2 = 12$ релации. Диаграмата вляво отговаря на само една релация, чийто граф е рефлексивното затваряне на диаграмата. И така, на диаграмите с три или четири свързани компоненти отговарят

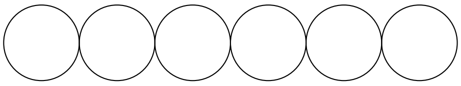
$$12 + 1 = 13$$

релации. Оттук броят на частичните наредби над четириелементно множество е

$$146 + 60 + 13 = 219$$

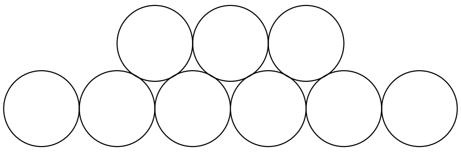
Задача 2: Разполагате с неограничено количество от еднакви монети с радиус 1. Дадено е $n \in \mathbb{N}^+$. От Вас се иска да конструирате разполагане на монетите съгласно следните правила.

- Започвате с точно n монети, разположени така, че центровете им са $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(5, 1)$, ..., $(2n - 1, 1)$. Примерно, при $n = 6$:

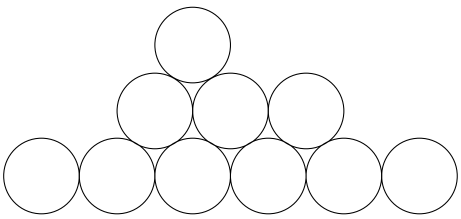
  

  Става дума за плътна линейна наредба, при която всеки две съседни монети се допират и центровете на монетите са върху една права. Тази наредба е *първият ред*.

- Върху първия ред може да сложите линейно между 0 и $n - 1$, пак наредени плътно, тоест всеки две съседни монети се допират, като всяка от тях се допира в точно две монети от първия ред. Тези монети образуват *втория ред*. Колко монети ще сложите във втория ред е Ваше решение; може да не сложите нито една и тогава конструкцията приключва. Да кажем, че решите да сложите три монети във втория ред. Очевидно има три начина втория ред от три монети да бъде сложен върху първия. Примерно, така:

- Да кажем, че втория ред има k монети. Ако $k > 1$, продължавате аналогично, избирайки число между 0 и $k - 1$. Ако избраното число е 0, конструкцията спира. В противен случай конструирате *третия ред*. В започнатия пример, нека третият ред е от само една монета, сложена така:

- И така нататък. Принципът, по който се строи всеки следващ ред, е ясен. Съществено е, че във всеки ред монетите са наредени плътно, без празнини между тях. Тъй като всеки следващ ред има по-малко монети от реда под него, рано или късно конструкцията ще приключи.

Пита се, по колко начина може да бъде извършена конструкцията като функция на n? Дайте отговор–формула, която използва само числа, буквата 'n', скоби и операции измежду събиране, изваждане, умножение, деление, степенуване и коренуване, но **не** използва рекурсия.

Решение: Да означим търсеното количество с T_n. Бърз експеримент показва, че $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5$ и $T_4 = 13$. Изглежда, че това са числа на Фибоначи, а именно $T_1 = F_1$, $T_2 = F_3$, $T_3 = F_5$ и $T_4 = F_7$. Работната хипотеза е, че $T_n = F_{2n-1}$. Естествено, това трябва да се докаже.

Разсъждаваме за T_n при $n > 1$. Ключовото наблюдение е, че слагайки k монети във втория ред, ние по същество правим конструкция, чийто най-долен ред има k монети – най-долният ред (който е от n монети) не се отразява никак на броя начини да бъде довършена конструкцията. И така, ако във втория ред има k монети, има T_k начина за довършването, за всяко възможно разполагане на тези k монети във втория ред. Има точно $n - k$ възможни разполагания на втория ред върху първия (бърза проверка: ако $k = 1$, наистина има $n - 1$ места, на които може да бъде сложена единствената монета във втория ред, а ако $k = n - 1$, наистина има само един начин да бъдат сложени $n - 1$ монети във втория ред). Изглежда, че ако $n > 1$, то $T_n = \sum_{k=1}^{n-1}(n - k)T_k$. Но това уравнение пропуска още една възможност: да не се сложи нищо във втория ред. Истинското уравнение е

$$
\begin{aligned}
T_1 &= 1 \\
T_n &= \left(\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)T_k\right) + 1, \qquad \text{ако } n > 1
\end{aligned} \tag{1}
$$

Страни́чна забележка: бихме могли да дефинираме $T_0 = 1$ и тогава уравнението би просто

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)T_k$$

Но това не е добра идея, ако искаме да покажем, че $T_n = F_{2n-1}$, защото тогава T_0 би било F_{-1}. Възможно е да дефинираме числа на Фибоначи и за отрицателни индекси; ако го направим, наистина $F_{-1} = 1$, защото тогава бихме искали $F_1 = F_0 + F_{-1}$ и при положение, че $F_1 = 1$ и $F_0 = 0$, единствената смислена стойност за F_{-1} е 1. Но не искаме да въвеждаме числа на Фибоначи с отрицателни индекси; ако го направим, формулата на Бине́ става проблематична. По-добре е индексната променлива k да започва от 1 и да има събираемо $+1$ извън сумата.

Рекурентното уравнение (1) не може да се реши с метода с характеристичното уравнение. Налага се да го преобразуваме. Имаме

$$T_n = (n-1)T_1 + (n-2)T_2 + (n-3)T_3 + \cdots + 3T_{n-3} + 2T_{n-2} + 1T_{n-1} + 1$$

Ако $n > 2$, то

$$T_{n-1} = (n-2)T_1 + (n-3)T_2 + \cdots + 3T_{n-4} + 2T_{n-3} + 1T_{n-2} + 1$$

Изваждаме второто от първото и получаваме

$$T_n - T_{n-1} = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-3} + T_{n-2} + T_{n-1}$$

Тоест,

$$T_n = 2T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} + \cdots + T_3 + T_2 + T_1$$

Но тогава

$$T_{n-1} = 2T_{n-2} + T_{n-3} + T_{n-4} + \cdots + T_3 + T_2 + T_1$$

Пак изваждаме второто от първото. Получаваме

$$T_n - T_{n-1} = 2T_{n-1} - T_{n-2}$$

Тоест,

$$T_n = 3T_{n-1} - T_{n-2} \tag{2}$$

Рекурентното уравнение (2) е еквивалентно на (1), ако бъде “снабдено” с подходящо второ начално условие, а именно $T_2 = 2$. (2) е решимо чрез метода с характеристичното уравнение, като решението с Maple(tm) е:

$$T_n = \left(1/2 + 1/10\sqrt{5}\right)\left(3/2 - 1/2\sqrt{5}\right)^n + \left(1/2 - 1/10\sqrt{5}\right)\left(3/2 + 1/2\sqrt{5}\right)^n \tag{3}$$

за $n \geq 1$.

Тук ще подходим другояче, за да акцентираме връзката с числата на Фибоначи. Искаме да покажем, че $T_n = F_{2n-1}$. За да е така, би трябвало да е вярно, че

$$F_{2n-1} = 3F_{2n-3} - F_{2n-5} \tag{4}$$

Дали (4) е в сила? Наистина, по определение имаме

$$F_{2n-1} = F_{2n-2} + F_{2n-3} \tag{5}$$
$$F_{2n-2} = F_{2n-3} + F_{2n-4} \tag{6}$$
$$F_{2n-3} = F_{2n-4} + F_{2n-5} \tag{7}$$

От (5) и (6) имаме

$$F_{2n-1} = F_{2n-3} + F_{2n-4} + F_{2n-3} \;\leftrightarrow\; F_{2n-1} = 2F_{2n-3} + F_{2n-4} \tag{8}$$

(7) е еквивалентно на

$$F_{2n-4} = F_{2n-3} - F_{2n-5} \tag{9}$$

От (8) и (9) имаме

$$F_{2n-1} = 2F_{2n-3} + F_{2n-3} - F_{2n-5} \;\leftrightarrow\; F_{2n-1} = 3F_{2n-3} - F_{2n-5}$$

Изведохме (4). Ползвайки (4) и (2), тривиално е да покажем по индукция, че $T_n = F_{2n-1}$.

И така, $T_n = F_{2n-1}$. Знаем от лекции, че

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Тогава

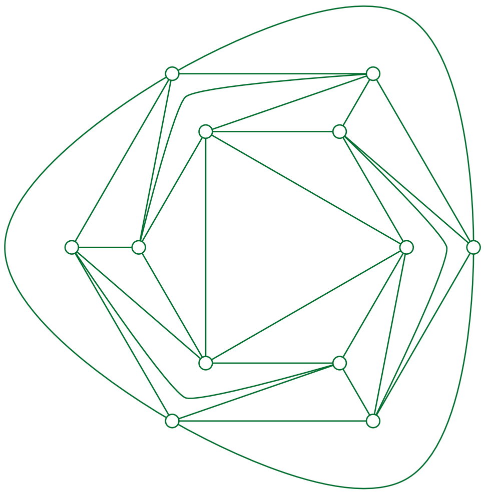
$$T_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} \tag{10}$$

за $n \geq 1$.

Разбира се, (3) и (10) са еквивалентни.

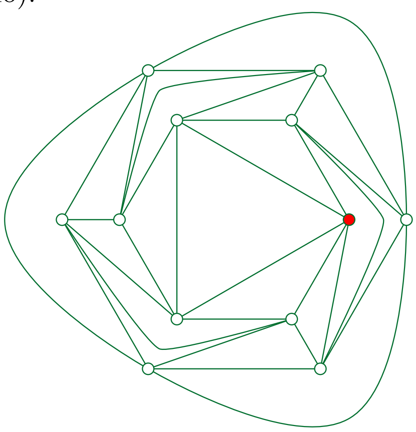
Задача 3: За целите на домашното, *забележителен граф* е всеки граф, в който никои четири върха не индуцират подграф $K_{1,3}$.

5 т. • Дайте кратка аргументация, че графът-икосаедър е забележителен. Графът-икосаедър е споменат в лекционните записки по графи. За Ваше удобство, ето го нарисуван като граф с анонимни върхове:

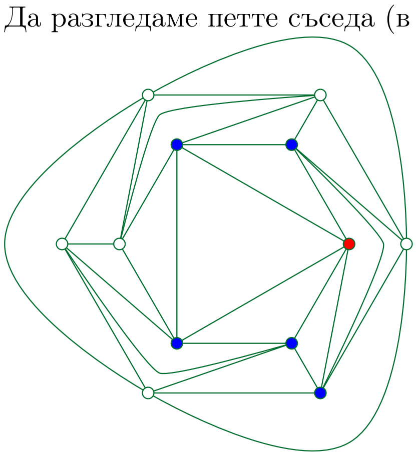


20 т. • Докажете прецизно, че ако G е забележителен и $\Delta(G) \geq 5$, то в G съществува цикъл с дължина 4.

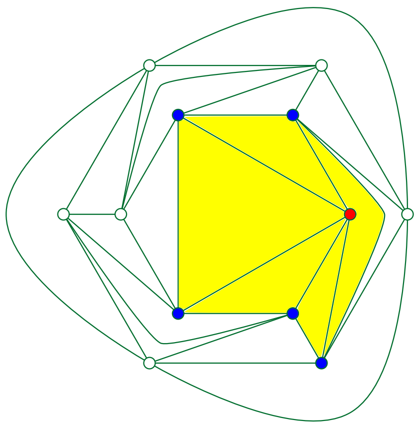
Решение: Веднага се вижда, че икосаедърът е 5-регулярен планарен граф и че той е граф–триангулация. Разглеждаме произволно негово планарно вписване и произволен планарен връх от вписването (в червено):



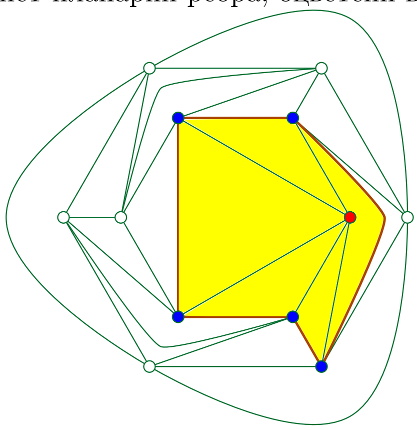
Да разгледаме петте съседа (в синьо) на избрания червен планарен връх.



Тъй като графът е 5-регулярен, за планарното вписване е вярно, че избраният планарен връх е в точно пет лица на вписването (в жълто):



Да си представим обединението на тези пет лица. Това е един свързан район на равнината, ограден от пет планарни ребра, оцветени в кафяво на тази фигура.



Очевидно е, че за всеки три сини планарни върха има поне два, които са краища на някое от кафявите ограждащи ребра. От това следва, че който и връх на графа да изберем, за всеки негови три съседа е вярно, че поне два от тях са краища на ребро. От това следва, че никои четири върха не индуцират $K_{1,3}$.

Да видим второто подусловие на задачата. Нека G е забележителен граф и $\Delta(G) \geq 5$. Нека u е връх от максимална степен в G. Очевидно $d(u) \geq 5$. Да разгледаме кои да е пет съседа на u. Да ги наречем a, b, c, d и f. Тъй като G е забележителен, трябва да има поне три ребра, чиито краища са измежду тези пет върха; ако допуснем обратното, да речем, че няма ребро, чиито два края са измежду a, b и c, то $\{u, a, b, c\}$ индуцира подграф $K_{1,3}$. Да кажем, че e_1, e_2 и e_3 са три различни ребра, чиито краища са измежду a, b, c, d и f.

Множество ребра в граф се нарича *съчетание*, ако нито две от тези ребра нямат общ връх. Лесно се вижда, че $\{e_1, e_2, e_3\}$ не е съчетание в G, поне триелементно съчетание има общо шест върха-краища на ребра. Тогава поне две ребра от $\{e_1, e_2, e_3\}$ са инцидентни. БОО, нека $e_1 = (a, b)$ и $e_2 = (b, c)$. Тогава цикъл с дължина четири в G е u, a, b, c, u.

Терминът "забележителен" се използва само в контекста на това домашно. Приетата терминология е, графът $K_{1,3}$ да се нарича *claw* и оттам видът графи, за който става дума в тази задача, се нарича *claw-free graphs*.

Задача 4: Разгледайте K_{n_1,n_2} като именуван граф. Намерете броя на циклите с дължина 6 в него. Смятаме, че два цикъла са различни, ако са различни подграфи.

Решение: Да кажем, че дяловете са V_1 и V_2, където $|V_1| = n_1$ и $|V_2| = n_2$. Очевидно е, че всеки цикъл с дължина 6 съдържа точно три върха от V_1 и точно три върха от V_2. Тъй като графът K_{n_1,n_2} е пълен двуделен граф, за всеки връх $u_1 \in V_1$ е вярно, че всеки $u_2 \in V_2$ е съсед на u_1, и обратно, за всеки връх $u_1 \in V_2$ е вярно, че всеки $u_2 \in V_1$ е съсед на u_1. На разговорен език, от всеки връх в даден дял може да "отидем" в който искаме връх в другия дял чрез едно единствено ребро.

Разглеждаме произволен цикъл c с дължина 6 в G. Нека върховете на c от V_1 са u_1, v_1 и w_1, а върховете на c от V_2 са u_2, v_2 и w_2. Забележете, че изборът на $\{u_1, v_1, w_1\}$ и $\{u_2, v_2, w_2\}$ не определя c напълно! Множеството $\{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2\}$ индуцира подграф $K_{3,3}$, а c е негов строг подграф, понеже $K_{3,3}$ има 9 ребра, а c има само 6 ребра. Ерго, определяйки кои 3 ребра на индуцирания подграф $K_{3,3}$ не са ребра от c, ние определяме c напълно. Тези 3 ребра обаче не може да са кои да е 3 ребра в индуцирания подграф $K_{3,3}$: те трябва да са съчетание в смисъл, че нито две от тях нямат общ връх. Съчетанията от 3 ребра в $K_{3,3}$ са точно 6 на брой: ако гледаме върховете от единия дял и конструираме съчетанието, за първия връх има избор от 3 ребра (това са всички ребра от $K_{3,3}$, инцидентни с него), за втория има избор само от 2 ребра, а за третия връх няма избор, понеже едно единствено ребро може да влезе в съчетанието. Тогава съчетанията с 3 ребра в именуван $K_{3,3}$ са 6 на брой.

Самият $K_{3,3}$ може да бъде избран по $\binom{n_1}{3}\binom{n_2}{3}$ начина, защото се определя напълно от избор на три върха от единия дял и три върха от другия дял. Крайният отговор е

$$6\binom{n_1}{3}\binom{n_2}{3}.$$